Eine Untersuchung der Anwendbarkeit rekurrenter Reihen zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten

von

Gordon Nelson Armstrong

aus

Delaware (Ohio) U. S. A.

Von der K. Technischen Hochschule zu München
zur Erlangung der Würde eines Doktors
der technischen Wissenschaften genehmigte

Dissertation.

Referent: Professor Dr. Heinrich Burkhardt.

Korreferent: Professor Geheimer Rat Dr. Walther Ritter von Dyck.

Tag der Annahme der Dissertation: 28. Februar 1913.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. März 1913.

München 1913.

Dr. Wild'sche Buchdruckerei Gebr. Parcus.

53072.

Eine Untersuchung der Anwendbarkeit rekurrenter Reihen zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten

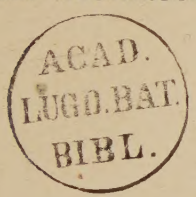
von

Gordon Nelson Armstrong

aus

Delaware (Ohio) U. S. A.

Von der K. Technischen Hochschule zu München
zur Erlangung der Würde eines Doktors
der technischen Wissenschaften genehmigte



Dissertation.

Referent: Professor Dr. Heinrich Burkhardt.

Korreferent: Professor Geheimer Rat Dr. Walther Ritter von Dyck.

Tag der Annahme der Dissertation: 28. Februar 1913.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. März 1913.

München 1913.
Dr. Wild'sche Buchdruckerei Gebr. Parcus.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Burkhardt, für die Anregung zu dieser Arbeit und das bei der Durchführung derselben entgegengebrachte Interesse meinen ehrerbietigsten und wärmsten Dank auszusprechen.

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	3
	Bezeichnungen und Abkürzungen	5
§§ 1—8.	Erstes Kapitel. Rekurrente Reihen	6
§§ 9—28.	Zweites Kapitel. Entwicklung der Methoden	13
§§ 29—45.	Drittes Kapitel. Beispiele bei Verwendung bekannter Daten	37
	Viertes Kapitel. Beispiele bei Verwendung beobachteter Daten.	
§§ 46—53.	Abschnitt A. Gedämpfte Schwingung	60
§§ 54—57.	„ B. Meteorologische Daten	66
§§ 58—79.	„ C. Magnetische Daten, Christiania . .	71
§§ 80—88.	„ D. Magnetische Daten, Christiania, Mailand, Prag	85
§ 89.	Tabelle der magnetischen Daten	94
	Figuren	

Einleitung.

In einer im Jahre 1772 der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung[1]) hat Lagrange eine Methode entwickelt, um eine in einer Reihe vorgegebener Zahlen etwa vorhandene Periodizität festzustellen. Ist die Zahlenfolge periodisch (im weiteren Sinne des Wortes), d. h. lassen sich die einzelnen Glieder T_m durch eine Summe von n periodischen Gliedern etwa in der Form darstellen: $T_m = \sum_{\varkappa=1}^{n} B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\,\beta_\varkappa)$, wobei die ganze Zahl m die Werte durchläuft . . — m . . . — 1, 0, 1, 2, . . . m . . so zeigt Lagrange auch, wie man die Perioden $\left(\frac{2\pi}{\beta_\varkappa}\right)$, die Phasen $b_\varkappa$ und die Amplituden $B_\varkappa$ bestimmen kann. In einem seiner Abhandlung beigefügten praktischen Beispiel[2]) wendet er seine Theorie auf eine Reihe von Daten an, die er Mayers Tafeln der Zeitgleichung entnommen hat. Diese Zahlen sind jedoch keine beobachteten Werte, sondern werden aus einer Formel berechnet,[3]) die sich ziemlich genau durch eine Summe von 2 periodischen Gliedern obiger Form darstellen läßt.[4])

In einer späteren Arbeit,[5]) aus dem Jahre 1778, die in dem astronomischen Jahrbuch der Berliner Akademie veröffentlicht ist, ging Lagrange nochmals auf diesen Gegenstand ein und erläuterte eine zweite Methode. An beiden Stellen entwickelte Lagrange im einzelnen die Theorie nur für den Fall rein trigonometrischer Ausdrücke von obiger Form, und beschränkte sich darauf, die Anwen-

---

[1]) Recherches sur la Manière de former des Tables des Planètes d'après les seules Observations. Mémoires de l'Académie Royale de Paris, année 1772. Oeuvres VI, p. 507—627. (Die Ziffern VI bezw. VII in den Fußnoten sollen sich immer auf die betreffenden Bände der Oeuvres beziehen.)

[2]) VI p. 588 ff.

[3]) VI p. 614 § 44.

[4]) VI p. 619.

[5]) Sur les Interpolations. Astronomisches Jahrbuch oder Ephemeriden für das Jahr 1783. VII p. 535—553.

dungsfähigkeit seiner Methoden auf allgemeinere[6])[7]) Ausdrücke in Kürze zu besprechen. Der von ihm ins Auge gefaßte Plan,[8]) seine zweite Methode auf eine Untersuchung der Differenzen zwischen den Beobachtungen und Halleys Tafeln für die Opposition von Saturn und Jupiter anzuwenden, scheint nicht zur Ausführung gekommen zu sein.[9])

Die vorliegende Arbeit bezweckt, nach einer kurzen Erläuterung der Lagrangeschen Methoden, die Theorie etwas zu verallgemeinern, bezüglich der Formeln und Methoden zu ergänzen, und schließlich die praktische Brauchbarkeit der Methoden einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Gewisse Eigenschaften der rekurrenten Reihen bilden die Grundlage der verschiedenen Methoden. Im ersten Kapitel werden infolgedessen einige Sätze über rekurrente Reihen vorausgeschickt. Im zweiten wird dazu übergegangen, die verschiedenen Methoden zu besprechen, wobei eine Anzahl Formeln abgeleitet wird. Das dritte Kapitel enthält eine Untersuchung über die Anwendbarkeit der Methoden bei Verwendung genauer Daten, während sich das letzte Kapitel mit derselben Aufgabe beschäftigt, wenn statt genauer Daten Beobachtungen vorliegen.

---

[6]) VI p. 626, § 47.

[7]) VII p. 551, §§ 14—16.

[8]) VII p. 553.

[9]) Vgl. Encyclopédie des Sc. Math. Interpolation Trigonométrique. T. II, V. 5, 27, § 21, insbesondere Fußnoten 145 mit 152.

Bezeichnungen und Abkürzungen.

Hier geben wir Erklärungen der wichtigsten der in dieser Dissertation eingeführten Bezeichnungen und Abkürzungen an, bezw. die betreffenden Hinweise, wo sich dieselben befinden.

$\underline{a}$ | bedeutet, daß Summen aus $\underline{a}$ aufeinanderfolgenden ursprünglichen Gliedern gebildet wurden. [Vgl. (72).]

$\underline{a\,m}$ | bedeutet den Mittelwert von $\underline{a}$ | Daten.

$\underline{a} \mid \underline{b}$ bedeutet, daß um $\underline{b}$ voneinander abstehende Terme dieser Summen benutzt wurden.

$\underline{c}$ | bedeutet, daß in den Daten $\underline{c}$ Ziffern gegeben sind.

$\overline{d}$ bedeutet, daß die Rechnung bis zu $\underline{d}$ Dezimalstellen ausgeführt wurde.

P_n-Funktionen, P_n-Daten: Funktionen, bezw. Daten, welche aus n periodischen Bestandteilen der Form B sin $(b + m\beta)$ oder aus ihrem Äquivalent (2n Zahlenverhältnisse ζ) bestehen.

Beste P_n: Siehe § 24.

P_n-System: Ein System R. S.-Gleichungen [vgl. (40)] mit der zur Bestimmung einer P_n-Funktion notwendigen Anzahl von $\underline{n}$ Skalakoeffizienten.

R_n-System: Ein System allgemeiner Skalen- (bezeichnet Ag. S.-) gleichungen der Form (38) mit $\underline{n}$ r.

R'_n-System: Das entsprechende System aus den Differenzen gebildet. (Siehe 36.)

K. B.-, Diff.-, Ag. S.-, R. S.-Methode: bezw. §§ 11, 12, 13, 14.

Zahlenverhältnisse ζ (α, β): §§ 2, 23.

Skala und Skalakoeffizienten: § 2; r : (38); r′ : (36); p : (40).

Skalagleichung: § 2; x-, y-, z-, ξ-Gleichungen: bezw. (44), (41), (45), (43).

Erzeugende Funktionen (E), $\frac{Z}{N}$: § 3; (E′), $\frac{Z'}{N'}$: § 4.

S-Reihe: (26); S_a-, S_b-, S_c-, S_d- (allgemein S_j-) Reihe: (28).

ζ', $\bar{\zeta}$; c′, $\bar{c}$: § 9; B, B′; b, b′ : (47).

T : (1) (9); t, t′, $\bar{t}$; $\mathfrak{T}$, $[\mathfrak{T}]$, $\{\mathfrak{T}\}$: § 22. Vgl. auch (72).

Scheinbare und absolute Reste: F. N. 18.

Verbesserte Periodenwinkel β : § 25.

Durchschnittslösung: §§ 13, 34.

V, VI in den Fußnoten beziehen sich auf die betreffenden Bände der Lagrangeschen Oeuvres.

Erstes Kapitel.

Rekurrente Reihen.

§ 1.

Rekurrente Reihen. Skala. Zahlenverhältnisse.

Betrachten wir die Zahlenfolge . . . T_{-m} . . T_{-1}, T_0, T_1 . . . T . . . . deren allgemeines Glied T_m die Potenzsumme:

$$(1) \qquad T_m = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa \zeta_\varkappa^m \qquad c_\varkappa \neq 0 \qquad \zeta_j \neq \zeta_p \neq \infty \neq 0$$

darstellt, worin $c_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$ reelle oder komplexe Konstanten bedeuten. Zwischen irgend $n + 1$[10]) sukzessiven Termen besteht eine identische Beziehung der Form:

$$(2) \qquad (R) \equiv r_n T_q + r_{n-1} T_{q+1} + \ldots + r_{n-i} T_{q+i} + \ldots + r_1 T_{q+n-1} + T_{q+n} \equiv 0.$$

Denn

$$(3) \qquad (R) \equiv \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa \zeta_\varkappa^q (r_n + \zeta_\varkappa r_{n-1} + \ldots \zeta_\varkappa^i r_{n-i} + \ldots \zeta_\varkappa^{n-1} r_1 + \zeta_\varkappa^n)$$

verschwindet identisch, wenn die r die Wurzeln der n linearen Gleichungen:

$$(4) \quad r_n + \zeta_\varkappa r_{n-1} \ldots + \zeta_\varkappa^i r_{n-i} \ldots + \zeta_\varkappa^n = 0 \text{ bedeuten } (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Aus (4) geht hervor, daß

$$(5) \qquad r_{n-i} = \frac{|1 . \zeta_2 \ldots (-\zeta_{i+1}^n) \ldots \zeta_n^{n-1}|}{|1 . \zeta_2 \ldots . (\zeta_{i+1}^i) \ldots . \zeta_n^{n-1}|}.$$

$$\equiv f_{n-i}(\zeta) \frac{\prod_{j,p=1}^{n} (\zeta_j - \zeta_p)}{\prod_{j,p=1}^{n} (\zeta_j - \zeta_p)} \qquad j > p$$

ist. Infolgedessen lassen sich immer sämtliche r eindeutig bestimmen und zwar als rationale Funktionen der ζ. Es besteht also eine und nur eine Beziehung (R), (2).

[10]) Man überzeugt sich leicht, daß der gleiche Beweis für den allgemeineren Fall „von je $(n + 1)$ nach irgend einem Gesetz ausgewählten Gliedern" analog geführt werden kann. Will man beispielsweise um k von einander abstehende Glieder benutzen, dann müßten $\zeta_\varkappa$ durch $\zeta_\varkappa^k$, $\sin \beta_\varkappa$ durch $\sin k \beta_\varkappa$ usw. ersetzt werden. Die Werte der $c_\varkappa$ hängen von der Wahl des T_0 ab.

Umgekehrt, wenn die r bekannt sind, ersieht man aus (4), daß die $\zeta_\varkappa$ die n Wurzeln der Gleichung:

(6) $G = x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots . r_{n-i} x^i + \ldots . r_n = 0$ sind.

Falls μ der ζ einander gleich sind, gestattet (vgl. § 5) eine Relation wie (2) mit n von einander unabhängigen r das Auftreten von Bestandteilen verwickelterer Form als (1) und zwar für jedes μ-fache ζ einen Ausdruck der Form:

(7) $(c_{\varkappa 1} + c_{\varkappa 2} m + c_{\varkappa 3} m^2 \ldots . + c_{\varkappa\mu} m^{\mu-1}) \zeta_\varkappa^m$,

und wenn μ einander gleiche ζ eben so viele ungleiche ersetzen, dann werden die entsprechenden Ausdrücke in (3):

(8) $c_{\varkappa\lambda} \zeta_\varkappa^q \left[r_n q^{\lambda-1} + r_{n-1} (q+1)^{\lambda-1} \zeta_\varkappa + r_{n-2} (q+2)^{\lambda-1} \zeta_\varkappa^2 + \ldots \right.$
$\left. (q+n)^{\lambda-1} \zeta_\varkappa^n \right] \qquad \lambda = 1 \ldots \mu.$

Es besteht also wiederum ein System von n unabhängigen Gleichungen, woraus sich die r bestimmen lassen.

Umgekehrt, wenn die r bekannt sind, bilden die ζ die Wurzeln der Gleichung (6), wobei die μ Ausdrücke (8) die Bedingungen $G(\zeta_\varkappa) = G'(\zeta_\varkappa) = G''(\zeta_\varkappa) \ldots . = G^{(\mu-1)}(\zeta_\varkappa) = 0$ für eine μ-fache Wurzel erfüllen. Es existiert also für die allgemeineren T_m

(9) $$T_m = \sum_{\varkappa=1}^{d} \sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} c_{\varkappa\lambda} m^{\lambda-1} \zeta_\varkappa^m, \qquad \left(\sum_{\varkappa=1}^{d} \mu_\varkappa = n \right)$$

eine Relation (2) und die ζ sind die Wurzeln einer Gleichung (6).

§ 2.

Eine Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} T_m . x^m$, deren Koeffizienten die Eigenschaft (2) besitzen, heißt eine rekurrente Reihe von der n^{ten} Ordnung. Die identische Beziehung (2) heißt die Relationsskala oder schlechthin Skala und ist auch von der n^{ten} Ordnung. Die r sind die Skalakoeffizienten. Die ζ werden wir die Zahlenverhältnisse nennen und dafür verschiedentlich $\zeta_\varkappa$, $e^{\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i}$, $e^{\alpha_\varkappa} (\cos \beta_\varkappa + i \sin \beta_\varkappa)$ schreiben. Aus der Gleichung (6), die wir als „Skalagleichung" bezeichnen, ersieht man, daß

(10) $r_\varkappa = (-1)^\varkappa \sum \zeta_1 \zeta_2 . . \zeta_\varkappa$ ist.

Irgend welche 2n mit Hilfe von (2) geeignet ausgewählte T bestimmen die Skala. Die Auflösung von (6) liefert die Zahlenverhältnisse. Die c können aus (1), bzw. (9) bestimmt werden unter Verwendung irgendwelcher n Glieder T.

§ 3.

Erzeugende Funktionen.

Zu jeder rekurrenten Reihe gehört eine erzeugende Funktion, oder einfach Erzeugende. Die Erzeugende, welche der Reihe mit der Skala (2) entspricht, läßt sich so bestimmen: Sei

(10) $S = T_q + T_{q+1}x + \ldots + T_{q+k}x^k + \ldots + T_{q+n}x^n + \ldots$

und bildet man den Ausdruck $S + Sr_1 x + Sr_2 x^2 + \ldots Sr_n x^n$, so reduziert sich derselbe vermöge (2) schließlich auf die Form:

(11) $$S = (E) = \frac{Z}{N} = \text{[11]}$$
$$\frac{T_q \ldots + (T_{q+k} + T_{q+k-1} r_1 + \ldots T_q r_k) x^k \ldots - T_{q-1} r_n x^{n-1}}{1 + r_1 x + \ldots r_k x^k + \ldots . r_n x^n}$$

Führt man die Division aus, so bilden die auftretenden Koeffizienten von x der Reihe nach die Glieder der mit T_q anfangenden Reihenfolge.

§ 4.

Dividiert man (2) durch r_n und setzt dann $\frac{r_{n-k}}{r_n} = r_k'$, so erhält man die rückläufige Skala:

(12) $(R') = r'_n T_{q+n} + \ldots r'_k T_{q+k} + \ldots r'_1 T_{q+1} + T_q \equiv 0.$

Verfährt man analog wie in § 3, so erhält man die entsprechende rückläufige Erzeugende, welche, wenn man statt r' wieder r einführt, die Form annimmt:

(13) $$(E') = \frac{Z'}{N'} =$$
$$\frac{T_{q-1} r_n \ldots - (T_{q+k} + T_{q+k-1} r_1 + \ldots T_q r_k) x^{n-k-1} \ldots - T_q x^{n-1}}{r_n + \ldots r_k x_k^{n-k} + \ldots r_1 x^{n-1} + x^n}$$

Betrachtet man (6), (11), (13), so sieht man, daß

(14) $$G^{(n)}(x) \equiv N'^{(n)}(x) \equiv x^n N^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ und}$$
$$Z'^{(n-1)}(x) \equiv -x^{n-1} Z^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ist.}$$

---

[11]) Was die Konvergenz der Reihe S anbelangt, so bemerkt man, daß mit zunehmenden m das größte ζ_m in T_m mehr und mehr überwiegt, daher strebt der Quotient T_n / T_{n+1} der Grenze $\frac{1}{\zeta_m}$ zu. Infolgedessen ist $|\frac{1}{\zeta_m}|$ der Konvergenzradius der Reihe S, die für $|x| < |\frac{1}{\zeta_m}|$ absolut konvergent sein wird. Mit Rücksicht auf (6) ersieht man, daß unter den Nullstellen des Nenners in (11) $\frac{1}{\zeta_m}$ den kleinsten Wert hat. Infolgedessen stimmen die Reihe und die erzeugende Funktion für jedes $|x| < |\frac{1}{\zeta_m}|$ miteinander überein. Dies steht im Einklang mit den Sätzen über Quotienten von endlichen Polynomen.

Wenn $f^{(n)}(x) = x^n F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist, dann heißen f und F, nach Lagrange „entgegengesetzte Funktionen".

§ 5.

Die Partialbrüche der erzeugenden Funktion.

Jeder echte Bruch von der Form

$$\frac{Z}{N} = \frac{t_0 + t_1 x + \ldots . t_{n-1} x^{n-1}}{1 + r_1 x + \ldots . r_{n-1} x^{n-1} + r_n x^n}$$

kann als eine Erzeugende betrachtet werden und die Zerlegung in seine Partialbrüche gibt Aufschluß über die Beschaffenheit der dazugehörigen rekurrenten Reihe. Denn aus einer Zerlegung und einer darauffolgenden Entwicklung in eine unendliche Reihe erhält man für:

$$(15) \qquad \frac{Z}{N} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{n_\varkappa}{1 - \zeta_\varkappa x} = \sum_{\varkappa=1}^{n} n_\varkappa \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_\varkappa^m x^m$$
$$= t'_0 + t'_1 x + t'_2 x^2 + \ldots t'_m x^m + \ldots .$$

Offenbar ist der Koeffizient von x^m nichts anderes als ein Ausdruck von der Form (1). Infolgedessen ist die Reihe rekurrent und

$$(16) \qquad c_\varkappa = n_\varkappa. \quad \text{(Hier ist } q = 0.)$$

Im Falle, daß N einen μ-fachen Faktor $(1 - \zeta_\varkappa x)^\mu$ enthält, tritt in dem obigen Verfahren bekanntlich die Form auf:

$$(17) \qquad \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\nu_j}{(1 - \zeta_\varkappa x)^j} = \sum_{j=1}^{\mu} \nu_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+j-1)}{(j-1)!} \zeta_\varkappa^m x^m.$$

Der Koeffizient von x_m kann auch geschrieben werden:

$$(18) \qquad \sum_{1}^{j-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p} \sum_{j=p+1}^{\mu} \nu_j \sum_{p=0}^{\mu-1} m^p \zeta_\varkappa^m$$

worin $\sum_{1}^{j-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p}$ die Summe aller p-gliedrigen Kombinationen der ganzen Zahlen $1, 2, \ldots$ mit $j-1$ bedeutet, und $\sum_{1}^{j-1} \frac{1}{0} = 1$ ist. Offenbar entspricht der Koeffizient von x^m in dieser Reihe dem Ausdruck (7), und es ist

$$(19) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_{\varkappa\lambda} m^{\lambda-1} = \sum_{1}^{j-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \sum_{j=p+1}^{\mu} \nu_j \sum_{p=0}^{\mu-1} m^p$$

$$\text{also} \quad c_{\varkappa\lambda} = \sum_{1}^{j-1} \frac{1}{1.2\ldots(\lambda-1)} \sum_{j=\lambda}^{\mu} \nu_j.$$

Der oben stehende Bruch $\frac{Z}{N}$ stellt die allgemeine Erzeugende (11) einer durch (2) definierten rekurrenten Reihe dar, und (15), (17) umfassen alle Möglichkeiten einer Partialbruchzerlegung dieses Bruchs. Daraus schließen wir, daß alle Formen, die in den Koeffizienten T der nämlichen rekurrenten Reihe vorkommen können, in dem Ausdruck (9) enthalten sind.

§ 6.

Reduzible erzeugende Funktion. Eindeutige Zerlegung der Terme T.

Sei eine erzeugende Funktion mit der entsprechenden rekurrenten Reihe vorgelegt, etwa:

$$\frac{Z}{N} = S = T_q + T_{q+1} x + \ldots T_{q+m} x^m + \ldots$$

Wenn nun Z und N den gemeinsamen Faktor K vom $(n-m)^{ten}$ Grade besitzen, so läßt sich schreiben:

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z_1 K}{N_1 K} = \frac{Z_1 K}{\prod_{\varkappa=1}^{m}(1-\zeta_\varkappa x) \prod_{m+1}^{n}(1-\zeta_\varkappa x)}$$

$$Z_1^{(m-1)} = N_1^{(m)} S.$$

Weil keine höhere Potenz als die $(m-1)^{te}$ auf der linken Seite auftreten kann, so müssen (Note 11) auf der rechten Seite sämtliche Koeffizienten der höheren Potenzen als der $(m-1)^{ten}$ identisch verschwinden. Es bestehen also Beziehungen wie:

(20) $T_{q+(s+m)} + d_1 T_{q+(s+m-1)} + \ldots d_m (T_{q+s}) \equiv 0$

d. h. die Reihe ist rekurrent von der m^{ten} Ordnung und besitzt eine Skala etwa:

(21) $\qquad T_q r_m + T_{q+1} r_{m-1} + \ldots T_{q+m} \equiv 0.$

Ferner verschwinden sämtlich die Koeffizienten c, welche zu den adjungierten Zahlenverhältnissen ζ des gemeinsamen Faktors gehören. Denn im allgemeinsten Falle, wo ein μ-faches $\zeta_\varkappa$ vorhanden ist und $K = K_1 (1-\zeta_\varkappa x)^\gamma$ ist, können wir etwa schreiben

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z_1 K_1 (1-\zeta_\varkappa x)^\gamma}{N_1 (1-\zeta_\varkappa x)^{\mu-\gamma} K_1 (1-\zeta_\varkappa x)^\gamma}.$$

Die bekannte Formel:

(22) $$\nu_{\mu-j} = \frac{1}{(-\zeta_\varkappa)^j . j!} \frac{d^j}{dx^j} \left[\frac{Z}{N}(1-\zeta_\varkappa x)^\mu\right]_{x=\frac{1}{\zeta_\varkappa}}$$

wodurch man die ν_j (19) bestimmen kann, nimmt die Form

$$\nu_{\mu-j} = \frac{1}{(-\zeta_\varkappa)^j . j!} \frac{d^j}{dx^j} \left[\frac{Z_1}{N_1}(1-\zeta_\varkappa x)^\gamma\right]_{x=\frac{1}{\zeta_\varkappa}}$$

an. Man sieht daraus, daß $\nu_\mu \ldots$ bis $\nu_\mu - (\gamma - 1)$ gleich Null sind. Infolgedessen [vgl. (17), (19)] tragen die wegen K eingeführten ζ zu den Gliedern T nichts bei.

Seien nun zwei nichtreduzierbare Skalen vom Grade m bzw. n, $m < n$, gegeben, welche dieselbe Reihe S liefern. Dann ist:

$$\frac{Z_{n-1}}{N_n} - T_q + T_{q+1} x + \ldots T_{q+m} x^m + \ldots = \frac{Z_{m-1}}{N_m}$$

also $Z_{n-1} N_m - Z_{m-1} N_n \equiv 0$ [12]) $\quad |x| < \left|\frac{1}{\zeta_m}\right|$.

Wegen der Irreduzibilität der Erzeugenden muß daher

$$Z_{n-1} = P Z_{m-1} \text{ und } N_n = P N_m \text{ sein.}$$

D. h. $\frac{Z_{n-1}}{N_n}$ ist wirklich $= \frac{P \cdot Z_{m-1}}{P \cdot N_m}$; woraus man ersieht, daß eine rekurrente Reihe zwei voneinander verschiedene irreduzible Skalen nicht haben kann.

Schließlich bestimmen sich die r dieser nicht reduziblen Skala aus m beliebig gewählten linearen Gleichungen der Form (2), und zwar eindeutig, wenn die Determinante des Systems nicht verschwindet. Aber das Verschwinden der sämtlichen $(m+1)$-reihigen Determinanten ist die Bedingung dafür, daß eine kleinere Anzahl von Unbekannten ein entsprechendes System befriedigt; daher würde eine Erzeugende niedrigerer Ordnung existieren. Dieses eindeutige System der r bestimmt nun vermittelst der Wurzeln der Skalagleichung auch ein eindeutiges ζ-System, was eine eindeutige Zerlegung der T (1), (9) sicherstellt.

Umgekehrt, adjungiert man noch ein ζ, dessen Koeffizient $c = 0$ ist, so tritt im Zähler und Nenner der Erzeugenden ein gemeinsamer Faktor auf. Dieser wird das wesentliche beitragende ζ-System nicht beeinträchtigen. Z. B. $\frac{Z}{N} + \frac{0}{P} = \frac{Z \cdot P}{N \cdot P}$.

§ 7.

Reziproke Relationsskalen.

Je zwei reziproke Faktoren in der Zerlegung der Skalagleichung (6):

$$(23) \quad r_n + r_{n-1} x + \ldots r_{n-k} x^k + \ldots x^n \equiv \prod_{\varkappa=1}^{n} (x - \zeta_\varkappa) = 0$$

[12]) Die Beziehung läßt sich rechnerisch bestätigen. Die Koeffizienten der Potenzen von x^p verschwinden für $p < m$ identisch, und auch für $p \geqq m$ vermöge Identitäten wie $T_q r_n + T_{q+1} r_{n-1} + \ldots T_{q+n} \equiv 0$ usw., $T_q r'_m + T_{q+1} r'_{m-1} + \ldots T_{q+m} \equiv 0$ usw.

bilden einen reziproken quadratischen Faktor $\left[x^2 - \left(\zeta_\varkappa + \frac{1}{\zeta_\varkappa}\right) x + 1\right]$

Aus der Erörterung des § 6 geht hervor, daß man sich das ζ-System ergänzt denken darf, allerdings mit Koeffizienten 0, bis der reziproke Wert von jedem ζ vorhanden ist, m. a. W. man darf für jede rekurrente Reihe eine vollkommen reziproke Skalagleichung annehmen und zwar von der Form:

'24) (G) $1 + p_1 x + \ldots p_{m-1} x^{m-1} + p_m x^m + p_{m-1} x^{m+1}$
$+ \ldots p_1 x^{2m-1} + x^{2m} = \prod_{\varkappa \; 1}^{m} \left(1 - (\zeta_\varkappa + \frac{1}{\zeta_\varkappa}) x + x^2\right) = 0.$

Die entsprechende Skala läßt sich schreiben:

(25) $(P) \equiv T_q + T_{q+1} p_1 + \ldots T_{q+m} p_m + \ldots T_{q+(2m-1)} p_1$
$+ T_{q+2m} \equiv 0$

Wenn die Skalagleichung vom n^{ten} Grade ist und als Wurzeln n—m reziproke ζ-Paare hat, dann wird die entsprechende reziproke Skalagleichung vom $2m^{ten}$ Grade sein, die Skala besitzt also nur m verschiedene Koeffizienten.

Der Vorteil bei der Anwendung von (P) besteht darin, daß jedes periodische Glied in den Daten von der Form $B \sin(b + m\beta)$ ein reziprokes ζ-Paar bestimmt. Weil zu erwarten ist, daß in den zu untersuchenden Daten solche Glieder sehr oft vorkommen werden, so kann die Verminderung (sie beträgt (n—m)) der Anzahl der Skalakoeffizienten, die bestimmt werden müssen, ganz beträchtlich sein. Die reziproke Skalagleichung läßt sich unmittelbar auf den Grad m reduzieren.

§ 8.

Aus diesem Kapitel (vgl. §§ 2, 6) ersieht man, daß Zahlen der Beschaffenheit (1), (9) eine rekurrente Reihe bestimmen und zwar derart, daß man zu einer eindeutigen Zerlegung dieser Zahlen in ihre wesentlichen Bestandteile geführt wird.

Nach dieser kurzen Betrachtung der Eigenschaften der rekurrenten Reihen nebst ihren erzeugenden Funktionen, Skalen und Skalagleichungen, gehen wir zu der Beantwortung der Frage über: wie lassen sich dieselben zur Untersuchung von vorgelegten Zahlenfolgen verwenden.

Zweites Kapitel.

Entwicklung der Untersuchungsmethoden und Ableitung von Formeln.

§ 9.

Drei wesentliche Teile der Untersuchung.

Sei eine Folge von Zahlen für gleiche Intervalle eines Parameters angegeben. Will man untersuchen, ob die einzelnen Glieder derselben von der Beschaffenheit

(1) $\sum_{\varkappa=1}^{n} c_n \, \zeta_\varkappa^m$ oder

(9) $\sum_{\varkappa=1}^{d} \sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} c_{\varkappa\lambda} \, m^{\lambda-1} \, \zeta_\varkappa^m$ oder wie wir sehen werden, von der Form

$\sum_{\varkappa=1}^{d} \sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} C_{\varkappa\lambda} \, m^{\lambda-1} \, e^{m\alpha_\varkappa} \sin(b_{\varkappa\lambda} + m\beta_\varkappa)$ sind, so zerfällt das Verfahren in drei wesentliche Teile und zwar:

(a) Untersuchung, ob die Folge überhaupt von obiger Beschaffenheit ist in der Weise, daß man eine entsprechende Relationsskala zu finden sucht.

(b) Falls eine derartige Skala gefunden ist, Auflösung der entsprechenden Skalagleichung um die Zahlenverhältnisse zu bestimmen und darauf diese womöglich zusammenzusetzen, um vorhandene periodische Eigenschaften sichtbar zu machen.

(c) Bestimmung der $c_\varkappa$ und der zu den periodischen und anderen speziellen Formen gehörenden Konstanten.

Da die verschiedenen Verfahren hauptsächlich nur notwendige Bedingungen verwenden, so bildet eine Auswertung die beste Probe für die Zuverlässigkeit der Resultate.

$\zeta_\varkappa$ und $\zeta'_\varkappa$ sollen reziproke, $\zeta_\varkappa$ und $\bar{\zeta}_\varkappa$ konjugierte Werte bedeuten. Die entsprechenden Koeffizienten $c_\varkappa$ und $c'_\varkappa$, bez. $c_\varkappa$ und $\bar{c}_\varkappa$ sind im allgemeinen nicht reziprok, bez. konjugiert.

§ 10.

Aufsuchen einer Relationsskala.

Wir erwähnen drei verschiedene Methoden um die im § 9 angegebene einleitende Untersuchung zu machen. Jede befaßt sich

im Wesentlichen damit, eine etwa vorhandene Relationsskala in der gegebenen oder in einer daraus gewonnenen Reihe ausfindig zu machen. Wir wollen sie etwa

(a) die Lagrangeschen Kettenbruchmethoden (K. B. Methoden).
(b) die Lagrangeschen Differenzmethode (Diff. Methode).
(c) die Skalamethode

nennen.

§ 11.

Kettenbruchmethoden.

Lagrange hat den Vorschlag gemacht[13]) eine mittels der vorgelegten Zahlenfolge $\ldots T_{-m} \ldots T_{-1}, T_0, T_1, T_2 \ldots T_m \ldots$ gebildete Reihe

$$(26) \qquad S = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \ldots T_m x^m + \ldots$$

nach einer Methode zu untersuchen, die sich folgendermaßen symbolisch darstellen läßt:

$$(27) \qquad S = \cfrac{1}{\cfrac{1}{S} - \cfrac{d_1}{\cfrac{1}{R'_0}}} = \cfrac{d_1}{1 + p_1 x + \cfrac{R_1}{R'_0}} = \cfrac{d_1}{1 + p_1 x + \cfrac{d_2 x^2}{\cfrac{R'_0}{R'_1}}}$$

$$\cfrac{d_1}{1 + p_1 x + \cfrac{d_2 x^2}{1 + p_2 x + \cfrac{R_2}{R'_1}}} = \ldots\ldots$$

Man wählt die Zählerkoeffizienten d_k so, daß die Anfangskoeffizienten der R'_{k-1} immer gleich 1 sind. Das (näherungsweise) Verschwinden von R_n deutet das Vorhandensein einer Skala n^{ten} Grades an. Der entsprechende echte Bruch ist die erzeugende Funktion und die Skala und die Skalagleichung ergeben sich unmittelbar aus dem Nenner desselben. (Vgl. (6), (11).)

Um die Arbeit dabei zu erleichtern, hat Lagrange vier neue Reihen[14]) eingeführt, nämlich:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } (T_0 + T_{-1}) + (T_1 + T_{-2})\, x + \ldots + (T_m + T_{-(m+1)})\, x^m \\ \qquad\qquad + \ldots = S_a \\ \text{b) } (T_0 - T_{-1}) + (T_1 - T_{-2})\, x + \ldots + (T_m - T_{-(m+1)})\, x^m \\ \qquad\qquad + \ldots = S_b \\ \text{c) } T_0 + (T_1 + T_{-1})\, x + \ldots + (T_m + T_{-m})\, x^m + \ldots = S_c \\ \text{d) } (T_1 - T_{-1}) + (T_2 - T_{-2})\, x + \ldots \\ \qquad + (T_{(m+1)} - T_{-(m+1)})\, x^m + \ldots = S_d \end{array} \right\} S_j$$

---

[13]) VI p. 525, § 10 ff., namentlich § 15; auch § 35, p. 573.
[14]) VI p. 554, §§ 24, 25.

Setzen wir in E (11) und E′ (13) $q = 0$, so sehen wir, daß die vier S_j (28) der Reihe nach den Ausdrücken:

$$(29) \qquad E + E' \; ; \; E - E' \; ; \; E + E'x \; ; \; \frac{E - T_0}{x} - E'$$

äquivalent sind.

Mit Berücksichtigung der Eigenschaften reziproker und entgegengesetzter (§ 4) Funktionen reduzieren sich nun die Erzeugenden für die vier Fälle (28) auf die Formen:

$$(30) \qquad \frac{(1-x)\,Z_a}{N_r} \; ; \; \frac{(1+x)\,Z_b}{N_r} \; ; \; \frac{(1-x^2)\,Z_c}{N_r} \; ; \; \frac{Z_d}{N_r},$$

wobei N_r und Z_j reziproke Ausdrücke vom geraden Grade $2m$ bez. $2(m-1)$ sind und $(n-m)$ die Anzahl der unter den ursprünglichen ζ befindlichen reziproken Paare ist. (Vgl. (11), (13), (14), § 7.) Die neu gewonnene reziproke Skala ist wirklich die (P)[15] (25) und besitzt denselben Vorteil wie diese.

Setzt man nun $y = \frac{x}{1+x^2}$ in obige Brüche $\frac{Z_j}{N_r}^{[2(m-1)]}_{[2m]}$ ein, so nehmen[16] sie die Form an: $\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{Z'_j}{N'_r}\right)$ vom Grade $\frac{[m-1]}{[m]}$ in y. Denkt man sich dann das Verfahren (27) für die entsprechenden y-Reihen ausgeführt und y darauf durch x ersetzt, so sieht man, daß $1 + p_k x + x^2$ an die Stelle von $1 + p_k y$ tritt, d. h. man wird die Divisionen bis zu quadratischen Quotienten vornehmen und gleich am Anfang $1 + x^2$[17] in die Quotienten bringen. Dadurch wird die Anzahl der notwendigen Divisionen um n—m vermindert. Diese Operationen lassen sich etwa so darstellen:

$$(31)\; S_j = \cfrac{\Phi_j \cdot d_1}{1 + p_1 x + x^2 + \cfrac{d_2 x^2}{1 + p_2 x + x^2 + \ldots \cfrac{d_k x^2}{1 + p_k x + x^2 + \cfrac{R_k}{R'_{k-1}}}}}$$

oder in der y-Form

---

[15]) Man kann sich überzeugen, daß $(P) = N_r = \frac{N \cdot N'}{\Pi}$ ist, worin Π das Produkt der (n—m) vorhandenen Faktoren $[1 - (\zeta_\varkappa + \frac{1}{\zeta_\varkappa})\, x + x^2]$ ist.

[16]) Vgl. VI § 27, § 30.

[17]) Dies beruht natürlich darauf, daß N_r reziprok und vom geraden Grad ist, also ein Produkt darstellt der Art: $\prod_{\varkappa=1}^{m} (1 - (\zeta_\varkappa + \frac{1}{\zeta_\varkappa})\, x + x^2)$.

$$(32)\qquad \frac{1}{1+x^2}\,\frac{\Phi_j \cdot d_1}{1+p_1 y+}\;\frac{d_2 y}{1+p_2 y+}\;\cdots\;\frac{d_k y^2}{1+p_k y+\dfrac{R_k}{R'_{k-1}}}$$

worin (a) $\Phi_a = (1-x)$; (b) $\Phi_b = (1+x)$; $\Phi_c = (1-x^2)$; $\Phi_d = 1$ bedeutet. Man beachte, daß die Konstanten d, p, usw. für die vier verschiedenen Fälle und auch für (27) andere sind.

Die Ausführung der Untersuchung der abgeleiteten Reihen unterscheidet sich also von der vorhergehenden (27) nur darin, daß man anstatt 1 für den ersten Dividenden $1-x$ bezw. $1+x$, $1-x^2$, 1 annimmt und $1+x^2$ in jedem Quotienten schreibt. Das Verschwinden der Reste [18]) deutet an, daß die abgeleiteten Reihen rekurrent sind. Durch Reduktion auf echte Brüche gewinnt man ihre erzeugenden Funktionen.[19])

Man kann drei verschiedene K. B.-Methoden unterscheiden. Offenbar ist:

(33) $S_a + S_b = 2\,S$ und $S_c + S_d\,x = 2\,S - T_0$. (Vgl. (26) (28).)

Diese zwei Zusammensetzungen, welche zwei verschiedene Methoden charakterisieren, sind zweckmäßig, um illusorische [20]) Skalen zu vermeiden und um zu den der ursprünglichen Reihe [21]) [22]) angehörenden $c_\varkappa$ zu gelangen. Eine dritte Methode bildet die umständlichere allgemeine K. B.-Methode (27).

---

[18]) Indem man jeden Divisor durch das d_k mit 1 anzufangen zwingt, können ganz illusorische Reste vorkommen. Es ist daher zweckmäßig, neben diesem scheinbaren Rest R einen absoluten einzuführen. Bringen wir (31) nach n vollständigen Divisionen auf einen echten Bruch $\frac{Z_{2n-1}}{N_{2n}}$, so erhalten wir $\frac{Z_{2n-1}}{N_{2n}} = S_j - (-1)^n \frac{d_1 d_2 \ldots d_n}{N_n} R_n x^{2n}$. Man betrachtet also besser den absoluten Rest $d_1 d_2 \ldots d_n R_n$ als R_n, um den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man mit n Operationen abbricht.

[19]) VI p. 580, § 37; namentlich p. 584, § 40, wo die Methode der Durchführung genau erläutert wird.

[20]) Die ursprüngliche Reihe S ist erst durch beide der Zusammensetzungen (33) bestimmt, dagegen durch eine einzige S_j-Reihe nicht bestimmt. Weiter braucht ein Verfahren mit einer einzigen S_j-Reihe nicht unbedingt auf N_r zu führen, weil irgend eine der Erzeugenden (30) reduzierbar sein kann. Siehe VI §§ 38, 39 und auch §§ 6, 26 dieser Arbeit.

[21]) VI p. 578—9.

[22]) VI p. 584, p. 586

§ 12.

Die Lagrangesche Differenzmethode.

In der 2ten der im § 1 erwähnten Lagrangeschen Abhandlungen betrachtet er dasselbe Problem vom Standpunkt der Interpolation [23]) aus für Daten der Form $\sum_{\varkappa=1}^{n} B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$. Nach unserer Bezeichnung können wir die Grundzüge dieser Methode etwa folgendermaßen darbringen:

Denkt man sich die Differenzen einer Zahlenfolge T_m in der Form:

$$
(34)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\Delta^0_{-j} & & & & & & \\
\vdots & \Delta^1_{-(j-1/2)} & & & & & \\
\Delta^0_{-2} & \vdots & \Delta^2_{-(j-1)} & & & & \\
- & \Delta^1_{-1\,1/2} & \vdots & \Delta^3_{-(j-1\,1/2)} & & & \\
\Delta^0_{-1} & - & \Delta^2_{-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
- & \Delta^1_{-1/2} & - & \Delta^3_{-1/2} & - & \vdots & \vdots \\
\Delta^0_{0} & - & \Delta^2_{0} & - & \Delta^4_{0} & \vdots & \Delta^{2j}_{0} \\
- & \Delta^1_{1/2} & - & \Delta^3_{1/2} & \vdots & \vdots & \\
\Delta^0_{1} & - & \Delta^2_{1} & \vdots & \vdots & & \\
- & \Delta^1_{1\,1/2} & \vdots & \Delta^3_{j-1\,1/2} & & & \\
\Delta^0_{2} & \vdots & \Delta^2_{j-1} & & & & \\
\vdots & \Delta^1_{j-1/2} & & & & & \\
\Delta^0_{j} & & & & & &
\end{array}
$$

geschrieben, worin $\Delta^0_k = T_k$ und $\Delta^m_k = \Delta^{m-1}_{k+1/2} - \Delta^{m-1}_{k-1/2}$, so sieht man, wenn es sich um den Fall $T_m = c\,\zeta^m$ handelt, daß die Differenzen

$$
(35)\quad
\begin{cases}
\text{(a)}\ \Delta^{2m}_1 = c\,\zeta^1,\ c\,\zeta^{1-1}(\zeta-1)^2,\ \ldots\ c\,\zeta^{1-m}(\zeta-1)^{2m} \\
\text{(b)}\ \Delta^{2m+1}_{1+1/2} = c\,\zeta^1(\zeta-1),\ c\,\zeta^{1-1}(\zeta-1)^3,\ \ldots\ c\,\zeta^{1-m}(\zeta-1)^{2m+1}
\end{cases}
$$

für $m = 0, 1, 2 \ldots$ sind.

Die geraden Differenzen von irgend einer Zeile und auch die ungeraden Differenzen bilden also geometrische Reihen und zwar je mit dem Verhältnis $\frac{(\zeta-1)^2}{\zeta}$. Bilden wir nun die entsprechenden Differenzen für $T_m = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa\,\zeta_\varkappa^{m}$, so sehen wir, daß die dadurch gewonnenen Reihenfolgen von derselben Art wie die Reihenfolge T_m sind, aber $\zeta_\varkappa$ wird dabei durch $\frac{(\zeta_\varkappa-1)^2}{\zeta_\varkappa}$ ersetzt. Es bestehen daher entsprechende rekurrente Reihen mit verschiedenen erzeugenden Funktionen aber mit derselben Skala.

[23]) VII 541, § 6.

Um festzustellen, ob die aus geraden und ungeraden Differenzen gebildeten Reihen rekurrent sind, könnte man natürlich die K. B.-Methoden verwenden. Lagrange hat auch noch folgende Methode vorgeschlagen. Nach Berechnung der Differenzen wähle man eine passende Zeile von geraden Differenzen aus und für die entsprechenden ungeraden Differenzen benütze man (was offenbar gestattet ist), die Halbsummen der oben und unten benachbarten Zeilen. Z. B. $\Delta^{2m+1}_k = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2m+1}_{k-1/2} + \Delta^{2m+1}_{k+1/2}\right)$. Dann bildet man eine unbestimmte Anzahl von Gleichungen: [24])

$$\begin{aligned}
&\Delta^0_k\, r_n' + \Delta^2_k\, r'_{n-1} + \Delta^4_k\, r'_{n-2} + \ldots = 0\\
&\Delta^2_k\, r_n' + \Delta^4_k\, r'_{n-1} + \Delta^6_k\, r'_{n-2} + \ldots = 0\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^1_k\, r_n' + \Delta^3_k\, r'_{n-1} + \Delta^5_k\, r'_{n-2} + \ldots = 0\\
&\Delta^3_k\, r_n' + \Delta^5_k\, r'_{n-1} + \Delta^7_k\, r'_{n-2} + \ldots = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Nach Division jeder Gleichung durch ihren ersten Koeffizient eliminiert man durch Subtraktion aufeinanderfolgender Gleichungen die erste, d. h. die r'_n te Kolonne. Wenn nun die Reihe eine Skala mit n r′ wirklich besitzt, muß nach n derartigen Eliminationen auch die $(n+1)^{te}$ Kolonne verschwinden. Die Anzahl der zuerst aufgestellten Gleichungen muß selbstverständlich größer als n sein. Die Auflösung von irgend n der Gleichungen liefert die r′. Wenn man die Elimination, so weit wie es die Genauigkeit der Daten berechtigt, getrieben hat, ohne (annäherndes) gleichzeitiges Verschwinden einer ersten und einer zweiten Koeffizientenkolonne zu erreichen, so schließt man daraus, daß die Reihe keine rekurrente ist.

Man kann hinzufügen, daß es zweckmäßig sein dürfte, die mit verschiedenen Δ^0 anfangenden Differenzzeilen zu benutzen, um die nötigen Gleichungen zu bilden. Dadurch vermeidet man die Notwendigkeit (wie sonst), die Rechnung einer einzigen Differenzzeile weit hinauszutreiben, wobei sich auch noch möglicherweise die Fehler häufen. Die Skala ist offenbar von der Wahl der Differenzzeilen unabhängig. Wenn die Differenzreihen rekurrent sind, so ergeben sich die entsprechenden Zahlenverhältnisse aus den Wurzeln der Skalagleichung:

$$\xi^n + r'_1\,\xi^{n-1} + \ldots r'_{n-1}\,\xi + r'_n = 0, \text{ worin } \xi_\varkappa = \frac{(\zeta_\varkappa - 1)^2}{\zeta_\varkappa}. \tag{37}$$

[24]) Die Lagrangesche Skala ist eigentlich unsere rückläufige Skala.

§ 13.

Die Skalamethode.

Eine dritte Methode, bei der man die Aufsuchung einer etwa vorhandenen Skala ohne weiteres vornimmt, wollen wir die Skalamethode nennen. Man bildet zunächst aus den vorgelegten Zahlen eine Anzahl Gleichungen der Form:

$$(38)\quad \begin{cases} T_0 r_n + T_1 r_{n-1} + T_2 r_{n-2} + \ldots\ldots = 0 \\ T_1 r_n + T_2 r_{n-1} + T_3 r_{n-2} + \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_k r_n + T_{k+1} r_{n-1} + T_{k+2} r_{n-2} + \ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

Das Verschwinden von sämtlichen $n + 1$-reihigen Determinanten ist die Bedingung dafür, daß die Reihe eine rekurrente n^{ten} Grades ist.

Für die praktische Ausführung einer Untersuchung ist das vorhin besprochene Eliminationsverfahren bequem. Dieses Verfahren kann offenbar als eine Art von Determinantenauswertung angesehen werden. Wenn sämtliche Gleichungen durch n r befriedigt sein sollen, so müssen sämtliche $n + 1$-reihigen Derterminanten verschwinden und die $n + 1^{te}$ Kolonne muß nach Elimination der ersten n Kolonnen aus lauter Nullen bestehen. Übrigens müssen vermöge der in Note 10 angedeuteten Eigenschaft einer rekurrenten Reihe n^{ten} Grades, nach Elimination von irgendwelchen n Kolonnen, und zwar bei beliebiger Aufeinanderfolge, sämtliche übrigen Kolonnen verschwinden, da ja irgend eine als $n + 1^{te}$ Kolonne gewählt werden kann. Weiter ist es bezüglich der Elimination wichtig, die zu subtrahierenden Zeilenpaare zweckmäßig auszuwählen und die schon ausgeführte Rechnung zu benützen, um die r zu bestimmen. Sind schon $n - 1$ Kolonnen eliminiert worden, so benützt man die zwei übrigen Kolonnen, um einen „Durchschnittswert" eines r zu bestimmen. Durch Einsetzen dieses Wertes in das aus drei Kolonnen bestehende System gewinnt man einen Durchschnittswert für ein zweites r. Auf ähnliche Weise bestimmt man alle n r. Dieses Verfahren nennen wir die „Durchschnittslösung" des Systems der q linearen Gleichungen mit n Unbekannten, r. $q > n$.

§ 14.

Die reziproke Skalamethode.

Im § 7 wurde gezeigt, daß eine reziproke Skala immer angenommen werden darf. Sei die Form einer solchen Skala und die der entsprechenden Skalagleichung etwa:

$$(39)\quad \begin{cases} T_0 + T_1 p_1 + \ldots T_{m-1} p_{m-1} + T_m p_m + T_{m+1} p_{m-1} \\ \qquad + \ldots T_{2m-1} p_1 + T_{2m} \equiv 0 \\ 1 + p_1 x + \ldots p_{m-1} x^{m-1} + p_m x^m + p_{m-1} x^{m+1} \\ \qquad + \ldots p_1 x^{2m-1} + x^{2m} = 0, \end{cases}$$

so bietet sich zum Zwecke der Untersuchung ein Gleichungssystem [vgl. (38)] in der Form dar:

$$(40)\quad \begin{cases} T_m p_m + (T_{m-1} + T_{m+1}) p_{m-1} \\ \quad + \ldots (T_{m-j} + T_{m+j}) p_{m-j} + \ldots = 0 \\ T_{m+1} p_m + (T_m + T_{m+2}) p_{m-1} \\ \quad + \ldots (T_{m+1-j} + T_{m+1+j}) p_{m-j} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{m+k} p_m + (T_{m+k-1} + T_{m+k+1}) p_{m-1} \\ \quad + \ldots (T_{m+k-j} + T_{m+k+j}) p_{m-j} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Die T_m, T_{m+1} .... T_{m+k} nennen wir die „Zentren" des Systems.

Man kann mit diesem System nach den obengegebenen Vorschriften verfahren.[25])

Von diesem wichtigen Fall der allgemeinen Skalamethode machen wir viel Gebrauch und bezeichnen sie mit R. S.-Methode.

§ 15.

Bestimmung der in T vorhandenen Zahlenverhältnisse ζ.

Sei durch eine der besprochenen Methoden ermittelt, daß eine vorgelegte Reihe (wahrscheinlich) periodisch ist, so sucht man zweitens die zugeordneten ζ.

Wenn es sich um die Kettenbruchmethoden handelt, berechnet man den betreffenden echten Bruch,[26]) d. h. die Erzeugende der benutzten Reihe. Wegen der Beziehung zwischen dem Nenner und der Skalagleichung gilt (vgl. (30)):

$$(41)\quad N_r = \prod_1^{2m} (1 - \zeta_\varkappa x)^{27})$$

und in y-Form (vgl. (32)) $N_r = \prod_1^{m} (1 - \omega_\varkappa y)$.

---

[25]) Man bemerkt, daß trotz der Zusammenfassung die in dieses System eintretenden einzelnen T immer bestimmt werden können. Daher dürften Enttäuschungen bei der R. S.-Methode nicht so leicht möglich sein wie bei den K. B.-Methoden. Siehe Note 20.

[26]) Lagrange gibt Formeln an, die für alle K. B.-Methoden gelten, um die Ergebnisse auf die Form $\frac{\Phi_j}{1+x^2} \frac{d_1}{\psi^{(m)}(y)} \psi^{(m-1)}(y)$ zu bringen. VI p. 586.

[27]) Unter den ζ-Wurzeln der K. B.-Methoden (ausgenommen der allgemeinen K. B.-Methode) und der R. S.-Methode können einige illusorisch sein, da die reziproke Form erzwungen wurde. (Vgl. §§ 11, 14.) Die betreffenden c sind Null. (§ 6.)

D. h. die Wurzeln von $N_r = 0$ liefern die $\zeta_\varkappa$ mittelst:

$$(42)\quad x_\varkappa = \frac{1}{\zeta_\varkappa} \text{ bezw. } y_\varkappa = \zeta_\varkappa(\zeta_\varkappa^2 + 1)^{-1} = (2\cos(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i))^{-1}$$

$$\zeta_\varkappa = (2y_\varkappa)^{-1}(1 \pm \sqrt{1 - 4y_\varkappa}).$$

Nimmt man die zur y-Gleichung reziproke, so erhält man sogleich die untenbesprochene z-Gleichung.

Bei der Differenzmethode bekommt man nach Berechnung der r'_k, aus der Skalagleichung (siehe (37)),

$$(43)\quad \xi^n + r_1'\xi^{n-1} + r_2\xi^{n-2} + \ldots r_n = 0, \text{ (die „}\xi\text{-Gleichung“)}$$

$$\xi_\varkappa = \frac{(\zeta_\varkappa - 1)^2}{\zeta_\varkappa} \text{ und daraus } \zeta_\varkappa = \frac{1}{2}[(\xi + 2) \pm \sqrt{\xi^2 + 4\xi}].$$

Bei der allgemeinen Skalamethode liefert die Skalagleichung

$$(44)\quad \prod_1^n (x - \zeta_\varkappa) = 0 \text{ ohne weiteres die Werte von } \zeta_\varkappa = x_\varkappa.$$

Die reziproke Skalagleichung der R. S.-Methode reduziert sich auf den halben Grad, wenn man $1 + x^2 = xz$ setzt. Analog zu (44) schreibt sich dann die Skalagleichung

$$(45)\quad \prod_{\varkappa=1}^m (x - \zeta_\varkappa)(x - \zeta'_\varkappa) = 0 = x^m \prod_1^m [z - (\zeta_\varkappa + \zeta'_\varkappa)],^{27})$$

(die „z-Gleichung“). Wir erhalten also:

$$z_\varkappa = \frac{1 + \zeta_\varkappa^2}{\zeta_\varkappa} = 2\cos(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i) \text{ und } \zeta_\varkappa = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4})$$

d. h. zwei reziproke Werte.

Für $m = 1, 2, 3, 4, 5$, reduziert sich (39) auf:

m	Reduzierte Gleichungen.
$1 : x$	$z + p_1 = 0$
$2 : x^2$	$z^2 + p_1 z - (2 - p_2) = 0$
$3 : x^3$	$z^3 + p_1 z^2 - (3 - p_2) z - (2 p_1 - p_3) z = 0$
$4 : x^4$	$z^4 + p_1 z^3 - (4 - p_2) z^2 - (3 p_1 - p_3) z + (2 - 2 p_2 + p_4) = 0$
$5 : x^5$	$z^5 + p_1 z^4 - (5 - p_2) z^3 - (4 p_1 - p_3) z^2 + (5 - 3 p_2 + p_4) z + (2 p_1 - 2 p_3 + p_5) = 0.$

(46)

§ 16.

Spezielle Kombinationen der ζ. Beitrag zu T. Fall lauter reeller T.

Vom größten Interesse sind die Fälle, worin sich zwei ζ derart zusammenfassen lassen, daß periodische Eigenschaften deutlicher hervortreten. Verstehen wir stets (§ 9) unter:

(47) $$\begin{aligned} &c_\varkappa + \bar{c}_\varkappa = B_\varkappa \sin b_\varkappa;\ c_\varkappa - \bar{c}_\varkappa = -B_\varkappa i \cos b_\varkappa; \\ &c_\varkappa + c'_\varkappa = B'_\varkappa \sinh b'_\varkappa;\ c_\varkappa - c'_\varkappa = B'_\varkappa \cosh b'_\varkappa, \end{aligned}$$

so bekommen wir mit Hilfe von $e^{zi} = \cos z + i \sin z = \cosh zi + \sinh zi$ und dergleichen Formeln die folgenden Resultate:

	Fall	Summe, $\zeta_\varkappa + \zeta_1$
(48)	Reziprokes Paar, $\zeta_\varkappa, \zeta'_\varkappa$	$2\cos(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i) = 2\cosh(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)$
(49)	Konjugiertes „ $\zeta_\varkappa, \bar{\zeta}_\varkappa$	$2\, e^{\alpha_\varkappa} \cos \beta_\varkappa$
(50)	$\lvert\zeta_\varkappa\rvert = \lvert\zeta'_\varkappa\rvert = \lvert\bar{\zeta}_\varkappa\rvert = 1$	$2 \cos \beta_\varkappa$.

Beitrag des ζ-Paares zu T_m, $c_\varkappa \zeta_\varkappa^m + c_1 \zeta_1^m$

(48) $$B'_\varkappa \sinh [b'_\varkappa + m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)]$$

(49) $$B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin [b_\varkappa + m\beta_\varkappa]$$

(50) $$B_\varkappa \sin [b_\varkappa + m\beta_\varkappa].$$

Fall eines μ-fachen ζ-Paares, Beitrag zu T_m:

(48′) Reziproke ζ

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B'_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1} \sinh [b'_{\varkappa\lambda} + m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)]$$

(49′) Konjugierte ζ

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1} e^{m\alpha_\varkappa} \sin [b_{\varkappa\lambda} + m\beta_\varkappa]$$

(50′) $$\lvert\zeta_\varkappa\rvert = \lvert\zeta'_\varkappa\rvert = \lvert\bar{\zeta}_\varkappa\rvert = 1$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1} \sin [b_{\varkappa\lambda} + m\beta_\varkappa].$$

Die praktischen Anwendungen dieser Methoden beziehen sich auf beobachtete Werte, also hauptsächlich auf lauter reelle T. Im Falle reeller T sind sämtliche Koeffizienten der Erzeugenden und der Skalagleichungen reell, weil sie sich durch ausschließlich rationale Operationen aus den T bestimmen lassen. Infolgedessen sind alle ζ reell oder bilden konjugiert imaginäre Paare und die Partialbruchzerlegung kann mit Hilfe von Potenzen linearer oder quadratischer Faktoren vollständig rational ausgeführt werden. Es bestehen also für lauter reelle T nur die Fälle:

(53)

Fall	Summe der zwei ζ
(a) Einzelne reelle $\zeta_\varkappa^{\mu_\varkappa}$,	— — — —
(b) $\mu_\varkappa$-fache reziproke reelle $\zeta_\varkappa$-Paare	$2\cosh\alpha_\varkappa$
(c) $\mu_\varkappa$-fache conjugierte $\zeta_\varkappa$-Paare	$2\,e^{\alpha_\varkappa}\cos\beta_\varkappa$
(d) $\mu_\varkappa$-fache $\lvert\zeta_\varkappa\rvert = \lvert\zeta_\varkappa\rvert = \lvert\overline{\zeta_\varkappa}\rvert = 1$,-Paare	$2\cos\beta_\varkappa$

(53)

Beitrag zu T_m

(a) $$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} c_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1}\, e^{m\alpha_\varkappa}$$

(b) $$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B'_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1} \sinh\left[b'_{\varkappa\lambda} + m\alpha_\varkappa\right]$$

(c) $$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1}\, e^{m\alpha_\varkappa} \sin\left[b_{\varkappa\lambda} + m\beta_\varkappa\right]$$

(d) $$\sum_{\lambda=1}^{\mu_\varkappa} B_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1} \sin\left[b_{\varkappa\lambda} + m\beta_\varkappa\right].$$

Weiter kann man sich überzeugen, daß die $c_{\varkappa\lambda}$ und $\overline{c}_{\varkappa\lambda}$ konjugiert und die $c_{\varkappa\lambda}$, $c'_{\varkappa\lambda}$, $B_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $B'_{\varkappa\lambda}$, $b'_{\varkappa\lambda}$ reell sein müssen. Sämtliche Beiträge (53) sind reell. Die auf einfache ζ bezüglichen Formeln gewinnt man durch bloßes Einsetzen von $\mu_\varkappa = 1$. Ein μ-faches $\zeta = 1$ liefert ein rein algebraisches Polynom vom $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade. $\zeta = 1$ liefert eine Konstante.

§ 17.

Deutung der Wurzeln der z- und ξ-Gleichungen.

Die z-Gleichung (45) spielt eine wichtige Rolle in den Rechnungen und von Interesse, namentlich in Bezug auf vorhandene Periodizitäten, ist der Zusammenhang zwischen den z und ζ. Aus (48), (53) geht hervor, daß

(54) $$z_\varkappa = \zeta_\varkappa + \zeta'_\varkappa = 2\cos(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa\,\mathrm{i}) = 2\cosh(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa\,\mathrm{i})$$

und für lauter reelle T

$$= 2\cosh\alpha_\varkappa\ [53_{(a)\,(b)}] \text{ bezw. } 2\cos\beta_\varkappa\ [53_{(d)}] \text{ ist.}$$

Ausgenommen im Fall komplexer z gibt (54) ohne weiteres die betreffende trigonometrische bezw. hyperbolische Funktion und die $\zeta_\varkappa$, $\zeta'_\varkappa$ an.

Wenn

$$z = e^{\alpha + \beta i} + e^{-(\alpha + \beta i)} = \gamma + \delta i \text{ ist, so sind}$$

(55) $$2 \cosh \alpha \cos \beta = \gamma \text{ und } 2 \sinh \alpha \sin \beta = \delta$$

und nach Elimination von β erhält man schließlich

$$\sinh \alpha = \sqrt{\frac{-(4 - \gamma^2 - \delta^2) + \sqrt{(4 - \gamma^2 - \delta^2)^2 + 16\,\delta^2}}{8}} = \omega \text{ und}$$

(56) daraus: $e^{\alpha} = \omega + \sqrt{\omega^2 + 1}$, und $\sin \beta = \delta / 2\,\omega$.

Mit Hilfe von (55) bestimmt man dann die $\alpha_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ für $\zeta_\varkappa$ und $\zeta'_\varkappa$ und damit auch die nämlichen Werte für $\overline{z}_\varkappa = \overline{\zeta}_\varkappa + \overline{\zeta}'_\varkappa$ die im Fall reeller T auch unter den ζ vorhanden sein müssen. Die $\zeta_\varkappa$, $\overline{\zeta}_\varkappa$ und $\zeta'_\varkappa$ $\overline{\zeta}'_\varkappa$ lassen sich dann so vereinigen, daß sie zu dem Glied T_m die Werte

(57) $B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin (b_\varkappa + m \beta_\varkappa)$ bez. $\overline{B}_\varkappa e^{-m\alpha_\varkappa} \sin (b_\varkappa - m \beta_\varkappa)$ beitragen.

Für ein μ-faches ζ wird ein entsprechendes μ-faches z vorkommen (ausgenommen im Falle $\zeta = \pm 1$) dessen Beitrag zu T_m sich nach (48′)—(50′) und den Angaben des § 16 bestimmen läßt.

Schreibt man

$$z = \zeta + \zeta' = \varrho\,(\cos \beta + i \sin \beta) + \frac{1}{\varrho}(\cos \beta - i \sin \beta)$$

$$= \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho} \cos \beta + i \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \sin \beta,$$

so sieht man alsbald, daß, wenn sich die ζ, ζ' auf dem um den Nullpunkt der ζ-Ebene beschriebenen Kreise mit den reziproken Radien ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ befinden, das entsprechende z auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\varrho^2 + 1}{\varrho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}\right)^2} = 1$$

liegt (Fig. 1). Wenn sich das Paar konjugierter Kreise allmählich in den Einheitskreis vereinigt, so artet die Ellipse in die zwischen + 2 und — 2 gelegene Strecke der Achse der reellen Zahlen aus. Man konstatiert ohne Schwierigkeit die unterhalb Fig. 1 angegebenen Beziehungen.

Wenn z im Sinn des Uhrzeigers die Ellipse umfährt, so durchläuft ζ in demselben Sinn den äußeren und ζ' im entgegengesetzten Sinn den inneren Kreis.

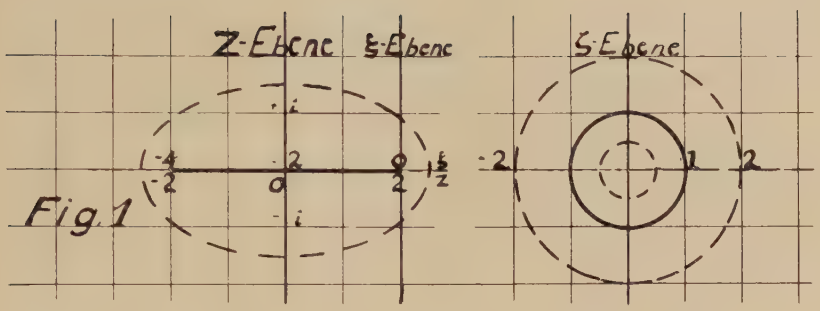


Fig. 1. Vergleich der z- und ξ- mit der ζ-Ebene.

Ort der z	Ort der ζ	Beitrag zu T_m
Reelle Achse	Einheitskreis	
0 bis + 2	$\pm i$ bis + 1	$B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$
0 „ − 2	$\pm i$ „ − 1	„ „
$z = 2\cos\beta$	$\alpha = 0$	
Reelle Achse	Reelle Achse	
2 bis $+\infty$	$\begin{cases} 1 \text{ bis } +\infty \\ 1 \text{ „ } 0 \end{cases}$	$B'_\varkappa \sinh(b'_\varkappa + m\alpha_\varkappa)$
$z = 2\cosh\alpha$	$\beta = 2n\pi$	
Reelle Achse	Reelle Achse	
− 2 bis $-\infty$	$\begin{cases} -2 \text{ bis } -\infty \\ -1 \text{ „ } 0 \end{cases}$	$(-1)^m B'_\varkappa \sinh(b'_\varkappa + m\alpha_\varkappa)$
$z = -2\cosh\alpha$	$\beta = (2n+1)\pi$.	
0	$+i, -i$	$B_\varkappa \sin\left[b_\varkappa + m\frac{2n+1}{2}\pi\right]$
+ 2	+ 1, + 1	$(c_1 + c_2 m)(1)^m$
− 2	− 1, − 1	$(c_1 + c_2 m)(-1)^m$
rein imaginär	rein imaginär	. . . . .
komplex	komplex	. . . . .

Es ist zu erwarten, daß einige der reziproken ζ zu T_m keinen Beitrag liefern, insbesondere in den Fällen $-2 < z < 2$ und für z komplex.

Was die ξ-Wurzel anbelangt, so sieht man aus (37), daß

$$(58)\quad \xi_\varkappa = \frac{(\zeta_\varkappa - 1)^2}{\zeta_\varkappa} = \frac{\zeta_\varkappa^2 + 1}{\zeta_\varkappa} - 2, \text{ also } \xi_\varkappa = z_\varkappa - 2 = -\left[2\sin\frac{\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i}{2}\right]^2.$$

Infolgedessen brauchen wir in der obigen Erörterung, um eine Übersicht über die Beziehung zwischen den ξ-Wurzeln und den ζ zu erhalten, lediglich z durch $\xi + 2$ zu ersetzen und die y-Achse der z-Ebene parallel nach rechts um $+2$ zu verschieben. Insbesondere erhalten wir für $-4 < \xi < 0$ gewöhnliche trigonometrische Funktionen $\xi = -\left(2 \sin \frac{\beta}{2}\right)^2$. Weiter sieht man, daß es keinen Zweck hat, eine reziproke Skala für die Differenzen zu erzwingen, da Kombinationen wie $\xi + \frac{1}{\xi}$ ohne Interesse sind.

Schließlich erhält man mittels der Relation $z_\varkappa = \frac{1}{y_\varkappa}$ unmittelbar die Eigenschaften der y-Wurzeln (42).

§ 18.

Bestimmung der konstanten Koeffizienten.

Es bleibt nur übrig, die Konstanten $c_\varkappa$ (1) $c_{\varkappa\lambda}$ (9) oder B, b, und B', b' (§ 16) zu bestimmen. Zwei Methoden stehen uns dazu zur Verfügung: (a) Mittels einer Partialbruchzerlegung der erzeugenden Funktion; (b) Mittels Gleichungen der Form (1), (9) oder, in den Fällen von kombinierten ζ, mittels der nötigen Anzahl von abgeleiteten Gleichungen.

§ 19.

Partialbruchmethode.

Weil wir die Methoden des § 21 vorzugsweise benützen, geben wir nur die Hauptformeln der anderen Methoden an.

Ist die Erzeugende in lineare Faktoren zerlegt worden, dann verwendet man, um die $c_\varkappa$ und $c_{\varkappa\lambda}$ zu ermitteln, Gleichung (16) bezw. (19). Ohne die Zerlegung vornehmen zu müssen, kann man (22) [28]) benutzen.

Für ein konjugiertes $\zeta_\varkappa$-Paar mit dem zu T_m gehörigen Beitrag $B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$ erhält man Partialbrüche der Form $\frac{K + \bar{K}x}{1 - 2e^{\alpha_\varkappa} \cos \beta_\varkappa x + e^{2\alpha_\varkappa} x}$, wobei,

[28]) Vgl. die von Lagrange VI p. 522 angegebene Formel $\frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} x^\mu \frac{d^{\mu-1}}{d x^{\mu-1}} \left[\frac{Z}{N} (1 - \zeta_\varkappa x)^\mu x^{-m-1}\right]_{x=\frac{1}{\zeta_\varkappa}}$ für die Bestimmung des Koeffizienten von x^m im allgemeinen Glied.

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} \tan b_\varkappa = \dfrac{K\, e^{\alpha_\varkappa} \sin \beta_\varkappa}{K + K\, e^{\alpha_\varkappa} \cos \beta_\varkappa}, \\ B_\varkappa = \dfrac{K}{\sin b_\varkappa} = \dfrac{\sqrt{K^2 + 2\,K\,\bar{K}\, e^{-\alpha_\varkappa} \cos \beta_\varkappa + \bar{K}^2\, e^{-2\alpha_\varkappa}}}{\sin \beta_\varkappa} \text{ ist.} \end{array}\right.$$

Setzt man $\alpha_\varkappa = 0$ und die betreffenden Werte von K und $\bar{K}$ in (61) ein, so bekommt man die Lagrange'schen Formeln[29]) für die zwei (33) K.B.-Methoden:

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{lll} & \text{Erste Methode} & \text{Zweite Methode} \\ K = & \dfrac{F + (F)}{2} & F' \\ \bar{K} = & -\dfrac{F - (F)}{2} & \left[\dfrac{1}{2}(F') - F' \cos \beta_\varkappa\right] \\ \tan b_\varkappa = & \dfrac{F_\varkappa + (F_\varkappa)}{(F_\varkappa) \cot \dfrac{\beta_\varkappa}{2} - F_\varkappa \tan \dfrac{\beta_\varkappa}{2}} & \dfrac{2\,F'_\varkappa \sin \beta_\varkappa}{(F'_\varkappa)} \\ B_\varkappa = & \dfrac{F + (F)}{2 \sin b_\varkappa} & \dfrac{F'}{\sin b_\varkappa} = \sqrt{F_\varkappa'^2 + \dfrac{(F_\varkappa')^2}{4 \sin^2 \beta_\varkappa}} \\ & = \dfrac{1}{2}\sqrt{F_\varkappa^2 \sec^2 \dfrac{\beta_\varkappa}{2} + (F_\varkappa)^2 \operatorname{cosec}^2 \dfrac{\beta_\varkappa}{2}} & \end{array}\right.$$

Die $F_\varkappa$, $(F_\varkappa)$, $F'_\varkappa$, $(F'_\varkappa)$ sind die dem Partialnenner $(1 - 2 \cos \beta_\varkappa\, y)$ entsprechenden Zähler in der Partialbruchzerlegung der erzeugenden Funktionen (in der y-Form) der Reihen (28) S_a, S_b, S_c, S_d.

§ 20.

Direkte Auswertung der Koeffizienten.

Will man die c unmittelbar aus den n T nämlich $T_0 \ldots\ldots T_{n-1}$, berechnen, so kann man n Gleichungen der Form $\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa\, \zeta_\varkappa^m = T_m$ verwenden. Wegen der Symmetrie läßt sich eine allgemeine Formel aufstellen:

$$(63)\quad c_\varkappa = \frac{T_{n-1} \ldots + (r_{q-1} + \Theta_{q-2}\zeta_\varkappa)\, T_{n-q} \ldots + (r_{n-1} + \Theta_{n-2}\zeta_\varkappa)\, T_0}{\zeta_\varkappa^{n-1} \ldots + (\quad ,, \quad)\, \zeta_\varkappa^{n-q} \ldots + (\quad ,, \quad) 1}$$

wobei die r die Skalakoeffizienten sind, und $\Theta_q = r_q + \Theta_{q-1}\zeta_\varkappa$ und $\Theta_0 = 1$ ist. Man beachte, daß, falls die T reell sind, dann $c_\varkappa$ und $\bar{c}_\varkappa$ (auch $c_\varkappa$ und $c'_\varkappa$, wenn $\alpha_\varkappa = 0$ ist) konjugiert sind. Man faßt dann die Glieder nach den in § 16 angegebenen Vorschriften zusammen.

[29]) VI p. 578—9; auch p. 587—8.

§ 21.

Eine erfahrungsgemäß gut bewährte Methode ist diejenige[30]), wo man zu einem passenden T_0 symmetrische Glieder verwendet, und zwei Bestimmungsgleichungssysteme vom Typus

$$(64)\quad \frac{1}{2}\left\{\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa \zeta_\varkappa^m + c_\varkappa \zeta_\varkappa^{-m}\right\} = \frac{T_m \pm T_{-m}}{2}$$

bildet, worin die ζ, bez. β und α, T_m und T_{-m} die Bekannten und $c_\varkappa$, $c_{\varkappa\lambda}$, bez. B, b die Unbekannten sind. Dann wird man auf die linke Seite der Gleichungen die Beiträge der verschiedenen vorhandenen Formen wie $B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\,\beta_\varkappa)$ (vgl. § 16) zu $\frac{T_m + T_{-m}}{2}$ bezw. $\frac{T_m - T_{-m}}{2}$ setzen. Berechnen wir diese Beiträge, so erhalten wir die folgenden Werte:

Beitrag zu T_m	Beitrag zu bezw. $\frac{T_{+m} \pm T_{-m}}{2}$
(68) Einfaches ζ, $c_\varkappa \zeta_\varkappa^m$	$c_\varkappa \cos\{m(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i)\}$
	bezw. $c_\varkappa\, i \sin\{m(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i)\}$
(69) $B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$	$B_\varkappa \sin b_\varkappa \cos m\beta_\varkappa$
	bezw. $B_\varkappa \cos b_\varkappa \sin m\beta_\varkappa$
(70) $B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$	$B_\varkappa \sin b_\varkappa \cos m\beta_\varkappa \cosh m\alpha_\varkappa$
	$+ B_\varkappa \cos b_\varkappa \sin m\beta_\varkappa \sinh m\alpha_\varkappa$
	bezw. $B_\varkappa \sin b_\varkappa \cos m\beta_\varkappa \sinh m\alpha_\varkappa$
	$+ B_\varkappa \cos b_\varkappa \sin m\beta_\varkappa \cosh m\alpha_\varkappa$
(71) $B'_\varkappa \sinh[b'_\varkappa + m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)]$	$B'_\varkappa \sinh b'_\varkappa \cosh m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)$
	bezw. $B'_\varkappa \cosh b'_\varkappa \sinh m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)$.

Wenn es sich um mehrfache ζ handelt, dann muß man beachten, daß die Vorzeichen der ungeraden Potenzen von m in den Gliedern T_m und T_{-m} entgegengesetzt sind.

Infolgedessen wird man, um die $\frac{T_m \pm T_{-m}}{2}$ betreffenden Ausdrücke für Glieder, worin $m^{\lambda-1}$ [vgl. (7), (48′)–(50′)] vorkommen, zu erhalten, in folgender Weise verfahren. Man ersetzt zunächst $c_\varkappa$, $B_\varkappa$, $b_\varkappa$ durch $c_{\varkappa\lambda}$, $B_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ und benützt dann:

a) wenn $\lambda - 1$ gerade ist, etwa $\lambda = 2p + 1$, ohne weiteres die Formeln (68—71) mit Hinzufügung des Faktors m^{2p} $(= m^{\lambda-1})$;

[30]) Vgl. VII p. 550.

b) wenn $\lambda - 1$ ungerade ist, etwa $\lambda = 2p$, muß man dagegen den Faktor m^{2p-1} hinzufügen und dann die zu $\frac{T_m + T_{-m}}{2}$ und $\frac{T_m - T_{-m}}{2}$ entsprechenden Ausdrücke miteinander vertauschen.

Auf jeden Fall bildet man die nötige Anzahl von Gleichungen, um sämtliche $c_\varkappa$, $B_\varkappa \sin b_\varkappa$, $B_\varkappa \cos b_\varkappa$ usw. zu bestimmen. Daraus bestimmt man die B und b.

§ 22.

Kombinationen von Gliedern T zur Bildung neuer Zahlenfolgen.

Betrachten[31]) wir eine Summe der Form $T_m + b \cdot T_{m+q} = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa (\zeta_\varkappa^m + b \zeta_\varkappa^{m+q})$, die sich offenbar so schreiben läßt:

$$\mathfrak{T}_m = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa (1 + b \zeta_\varkappa^q) \zeta_\varkappa^m = \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa \zeta_\varkappa^m,$$

die also einen Ausdruck derselben Form mit denselben $\zeta_\varkappa$ aber mit anderen c darstellt. Daraus kann man schließen: wenn die $\sum T_m x^m$ eine rekurrente Reihe bilden, so bilden die Terme $\mathfrak{T}_m = a_1 T_m + a_2 T_{m+p} + a_3 T_{m+q} + \ldots$, wo die $a_\varkappa$ beliebige Konstanten sind, eine rekurrente Reihe mit derselben Skala aber mit anderen Konstanten c und anderer erzeugenden Funktion.

Wahrscheinlich werden sich solche lineare Kombinationen insbesondere dann empfehlen, wenn es sich um beobachtete Daten handelt, um eine Ausgleichung der Fehler zu bewerkstelligen. Wollen wir mit Hilfe dieser neuen $\mathfrak{T}$ die Skala suchen und auch die $c_\varkappa$, die sich auf die ursprünglichen T_m beziehen, so müssen wir zwecks der letzten Aufgabe neue Formeln aufstellen.

Wir betrachten den Fall, worin $\mathfrak{T}_m$ die Summe von n aufeinanderfolgenden T, nämlich $T_q + \ldots$ bis T_{q+n-1} bedeutet und $m = q + \frac{n-1}{2}$, d. h., wo T_m das mittlere Glied der Summe ist. Infolgedessen ist

(72) $\mathfrak{T}_m = (T_q + T_{q+1} + \ldots T_{q+\frac{n-3}{2}} + T_{q+\frac{n-1}{2}} + T_{q+\frac{n+1}{2}} \ldots + T_{q+n-1})$ für n ungerade

und $= (T_q + T_{q+1} + \ldots T_{q+\frac{n-2}{2}} + T_{q+\frac{n}{2}} \ldots + T_{q+n-1})$ für n gerade

[31]) VI p. 517, § 7, wo sich eine längere Besprechung von verschiedenen aus einer ursprünglichen rekurrenten Reihe abgeleiteten rekurrenten Reihen befindet.

und in beiden Fällen erhält man nach Summieren der geom. Reihen

$$(73) \qquad \mathfrak{T}_q = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa \zeta_\varkappa^{-\frac{n-1}{2}} \frac{(1-\zeta_\varkappa^n)\cdot\zeta_\varkappa^m}{1-\zeta_\varkappa}.$$

Daraus gewinnt man

$$(74) \qquad C_\varkappa = c_\varkappa \frac{1-\zeta_\varkappa^n}{(1-\zeta_\varkappa)\zeta_\varkappa^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{und} \quad c_\varkappa = \frac{\zeta_\varkappa^{\frac{n-1}{2}}(1-\zeta_\varkappa)}{1-\zeta_\varkappa^n} C_\varkappa.$$

Wenn man es vorzieht $\mathfrak{T}_m = T_m + T_{m+1} + \ldots T_{m+n-1}$ zu nehmen, erhält man ähnlicherweise für diesen Fall

$$(75) \qquad c_\varkappa = \frac{1-\zeta_\varkappa}{1-\zeta_\varkappa^n} C_\varkappa.$$

Man kann also die $C_\varkappa$ aus den $\mathfrak{T}_m$ mit Hilfe der in §§ 19, 20, 21 angegebenen Vorschriften berechnen und schließlich mittels (74) bzw. (75) $c_\varkappa$ bestimmen. Es ist aber, um die Methode des § 21 anwenden zu können, wünschenswert, die einschlägigen Formeln zur Verfügung zu haben, die sich auf die $\mathfrak{T}_m$ beziehen. Infolgedessen müssen wir für $\mathfrak{T}_m$ und $\mathfrak{T}_{-m}$ die zu (68—71) entsprechenden Ausdrücke berechnen. Wir benützen das in (72) definierte $\mathfrak{T}_m$ und bezeichnen den Beitrag von $\zeta_\varkappa$ zu $\mathfrak{T}_m$ mit t_m. Summieren zunächst die Beiträge aus den n T und fassen dieselben mit Hilfe der Formeln

$$\frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\mu} \cos \mu t = \frac{\sin(2\mu+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu} \cos(\alpha + \mu t) = \frac{\sin\frac{(\mu+1)}{2} t}{\sin\frac{t}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{\mu}{2} t\right) \text{ zusammen.}$$

Wir erhalten dann für n entweder ungerade oder gerade

$$t_m = c_\varkappa \frac{\sin\frac{n}{2}(\alpha_\varkappa i - \beta_\varkappa)}{\sin\frac{(\alpha_\varkappa i - \beta_\varkappa)}{2}} e^{m\alpha_\varkappa}(\cos m\beta_\varkappa + i \sin m\beta_\varkappa)$$

$$= c_\varkappa Q e^{m\alpha_\varkappa}(\cos m\beta_\varkappa + i \sin m\beta_\varkappa)$$

und ebenfalls für das konjugierte $\bar{\zeta}_\varkappa$

$$\bar{t}_m = \qquad\qquad = \bar{c}_\varkappa \bar{Q} e^{m\alpha_\varkappa}(\cos m\beta_\varkappa - i \sin m\beta_\varkappa)$$

Mit Beibehaltung der Bezeichnung (47) bekommen wir

$$(76)\quad t_m + \bar{t}_m = [\mathfrak{T}_m] = \frac{B_\varkappa \sin b_\varkappa}{2}\left|\begin{array}{l} e^{m\alpha_\varkappa}\cos m\beta_\varkappa\,(Q+\bar{Q}) \\ + \\ e^{m\alpha_\varkappa}\sin m\beta_\varkappa\,(Q-\bar{Q})\,i \end{array}\right.$$

$$+\frac{i\,B_\varkappa\cos b_\varkappa}{2}\left|\begin{array}{l} e^{m\alpha_\varkappa}\cos m\beta_\varkappa\,(-Q+\bar{Q}) \\ + \\ e^{m\alpha_\varkappa}\sin m\beta_\varkappa\,(-Q-\bar{Q})\,i \end{array}\right.$$

Schreiben wir

$$(77)\quad \left|\begin{array}{l} M = \dfrac{Q+\bar{Q}}{2} = \dfrac{\cosh^{\frac{n-1}{2}}\alpha_\varkappa\cos^{\frac{n+1}{2}}\beta_\varkappa - \cosh^{\frac{n+1}{2}}\alpha_\varkappa\cos^{\frac{n-1}{2}}\beta_\varkappa}{\cos\beta_\varkappa - \cosh\alpha_\varkappa} \\ N = -\dfrac{Q-\bar{Q}}{2}\,i = \dfrac{\sinh^{\frac{(n-1)}{2}}\alpha_\varkappa\sin^{\frac{n+1}{2}}\beta_\varkappa - \sinh^{\frac{n+1}{2}}\alpha_\varkappa\sin^{\frac{n-1}{2}}\beta_\varkappa}{\cos\beta_\varkappa - \cosh\alpha_\varkappa} \end{array}\right.$$

so bekommen wir schließlich die der Tabelle des § 21 entsprechenden Formeln:

	Form	Wert	Bemerkungen
(78)	$t_m + \bar{t}_m = [\mathfrak{T}_m]$. Konj. ζ-Paar	$B_\varkappa \sin b_\varkappa \{ e^{m\alpha_\varkappa}\cos m\beta_\varkappa\, M - e^{m\alpha_\varkappa}\sin m\beta_\varkappa\, N \}$ $+ B_\varkappa \cos b_\varkappa \{ \,,, \,,, \,,, N + \,,, \,,, \,,, M \}$	Entspricht (49)
(79)	$\frac{[\mathfrak{T}_m]\pm[\mathfrak{T}_{-m}]}{2}$:	$B_\varkappa \sin b_\varkappa$ {cosh $m\alpha_\varkappa \cos m\beta_\varkappa$ M − sinh $m\alpha_\varkappa \sin m\beta_\varkappa$ N} (1); bezw. ,, {sinh ,, ,, ,, ,, − cosh ,, ,, ,, ,,} (2); $+ B_\varkappa \cos b_\varkappa$ {cosh ,, ,, ,, N + sinh ,, ,, ,, M} (3); bezw. ,, {sinh ,, ,, ,, ,, + cosh ,, ,, ,, ,,} (4)	Entspricht (70)
(80)	$\frac{[\mathfrak{T}'_m]\pm[\mathfrak{T}'_{-m}]}{2}$:	$\bar{B}_\varkappa \sin \bar{b}_\varkappa$ {+ derselbe Klammerausdruck (1)}; bezw. ,, {− ,, ,, (2)}; $+ \bar{B}_\varkappa \cos \bar{b}_\varkappa$ {+ ,, ,, (3)}; bezw. ,, {− ,, ,, (4)}	Die reziproken ζ zu (79)
	$t_m + t'_m = \{\mathfrak{T}_m\}$. Reziprokes ζ-Paar	$Q' B'_\varkappa \{\sinh[b'_\varkappa + m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)]$. $Q' = \dfrac{\sinh\frac{n}{2}(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)}{\sinh(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)}$	Entspricht (48)
(81)	$\frac{\{\mathfrak{T}_m\}+\{\mathfrak{T}_{-m}\}}{2}$:	$B'_\varkappa \sinh b'_\varkappa\, Q' \cosh m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)$	Entspricht (71)
	$\frac{\{\mathfrak{T}_m\}-\{\mathfrak{T}_{-m}\}}{2}$:	$B'_\varkappa \cosh b'_\varkappa\, Q' \sinh$,, ,,	

(82) Reelle ζ in (81). Man setze $\beta_\varkappa = 0$ in (81) ein.

Form	Wert	Bemerkung
(83) $\lvert\zeta\rvert=\lvert\bar{\zeta}\rvert=\lvert\zeta'\rvert=1$ in (79) und (81)	$\dfrac{B_\varkappa \sin b_\varkappa}{\sin \frac{\beta_\varkappa}{2}} \cos m\beta_\varkappa$ bezw. $B_\varkappa \cos b_\varkappa$ „ $\sin m\beta_\varkappa$	Entspricht (69).

Man beachte, daß (79) bezw. (81) die Beiträge von $B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$ bezw. $B'_\varkappa \sinh[b'_\varkappa + m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)]$ zu $\frac{\mathfrak{T}_{+m} \pm \mathfrak{T}_{-m}}{2}$ darstellen.

Aus (79), (80) und anderen Formeln ersieht man, daß es für die Bestimmung der Werte B, $\bar{B}$, b, $\bar{b}$ möglich und zweckmäßig ist, dieselben nicht aus den Ausdrücken B sin b, B cos b, usw. sondern aus Verbindungen wie B sin b $\pm$ $\bar{B}$ sin $\bar{b}$ und B cos b $\pm$ $\bar{B}$ cos $\bar{b}$ usw. zu berechnen. (Vgl. z. B. § 64.)

Im Falle mehrfacher ζ verfährt man nach den in § 21 für mehrfache ξ gegebenen Vorschriften um zunächst die Koeffizienten von C zu bekommen und setzt die entsprechenden Werte in das Gleichungensystem der $\frac{\mathfrak{T}_n + \mathfrak{T}_{-m}}{2}$ ein, und erhält dann schließlich die C selbst. (Die C beziehen sich auf die $\mathfrak{T}_c$. „ c „ „ „ „ $\mathfrak{T}_c$.)

Berechnet man nun die Summe von n Gliedern der Form $T_m = c_{\varkappa\lambda}\, m^j\, e^{m(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)}$, [vgl. (72)], so bekommt man analog zu (74) daraus

$$(84) \qquad c_{\varkappa\lambda} = C_{\varkappa\lambda} \Big/ \left\{ \left(\frac{2m-n+1}{2m}\right)^j e^{-\frac{n-1}{2}(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)} + \ldots + \left(\frac{2m+n-1}{2m}\right)^j e^{\frac{n-1}{2}(\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)} \right\}$$

wobei die $c_{\varkappa\lambda}$ sich bestimmen lassen.

Setzen wir in den Formeln dieses Paragraphen $n = 1$, so bekommen wir sogleich die Formeln von § 21.

§ 23.

Die Wahl der Periodenwinkel $\beta_\varkappa$.

Wenn es sich um Ausdrücke der Form $B_\varkappa e^{m\alpha_\varkappa} \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$ handelt, so bestimmen wir die $\beta_\varkappa$ für gewöhnlich mittels der Wurzeln der z-Gleichung, also durch $z = 2\cos(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa i)$. Es ist dann die Frage, welcher der Werte $n \cdot 2\pi \pm \beta$ zu wählen ist. Aus den Daten läßt sich die Natur der Kurve zwischen zwei aufeinander folgenden Datenpunkten nicht bestimmen. Im Allgemeinen würde man natürlich den kleinsten Winkel, d. h. die längste

Periode annehmen, da diese Wahl die direkteste Kurve zwischen sukzessiven Datenpunkten liefert.

Je weniger β von $2\pi - \beta$ abweicht, d. h. je näher $\cos\beta = -1$ ist, um so größer ist die Ungewißheit, welcher Winkel anzunehmen ist.

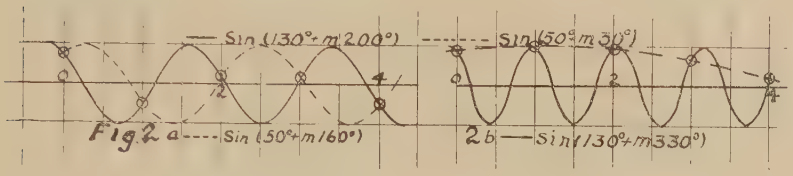


Fig. 2.

Für die gezeichneten Fälle könnten die Kurven ungefähr obiges Aussehen haben. Im ersten Fall ist es fast gleich, ob man $\beta = 160^0$ oder 200^0 annimmt, aber im zweiten Fall würde man mangels weiterer Kenntnisse über den Verlauf der Kurve die dem kleineren Winkel 30^0 entsprechende Kurve annehmen. (Vgl. § 87, Bemerkungen über Greenwich.)

Wir werden im allgemeinen den möglichst kleinen Winkel annehmen, wofern nicht aus den Daten zu schließen ist, daß ein größerer wahrscheinlich der richtige ist.

§ 24.

Interpolationfunktion. Die am besten sich annähernde Funktion mit einer bestimmten Anzahl von periodischen Bestandteilen.

Auch in Fällen von nicht rekurrenten Reihen kann es, namentlich zwecks Interpolation, wünschenswert sein, eine Annäherungsformel der Form $\sum_1^n B_\varkappa \sin(b_\varkappa + m\beta_\varkappa)$ zu finden. Hat man sich entschlossen, die beste Funktion mit drei Perioden, also $n = 3$ (bezeichnet als „die beste P_3") zu suchen, so kann man zunächst alle Gleichungen [z. B. der Form (40)] bilden, welche die Daten gestatten. Für dieses System wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate oder nach irgend einer geeigneten anderen Methode die Skalakoeffizienten p_k bestimmen und daraus die einschlägigen Konstanten ermitteln. Selbstredend hat man keine Sicherheit dafür, daß die Rechnung zu wirklichen Perioden führen wird oder, daß die gewonnene Funktion eine gute Annäherung sein wird. Der praktische Wert dieses Verfahrens ist fraglich.

Eine verwandte Frage ist die der Bestimmung der besten Konstanten c, b, B usw. Anscheinend wäre es zweckmäßig, möglichst viele der Daten in der Rechnung zu verwenden, damit man

die besten Durchschnittswerte erhält. Unter den verschiedenen Methoden erscheinen zwei empfehlenswert: (a) Man bilde zunächst eine große Anzahl von Gleichungen nach den im § 21 angegebenen Vorschriften und löse dann das System nach der obigen Methode zur Bestimmung der besten β auf. (b) Man bildet Summen aus vielen sukzessiven T und operiere mit diesen neuen $\mathfrak{T}$, wie in § 22 erläutert wurde.

§ 25.

Verbesserung der Periodenwinkel β mittels der Phasenwinkel b.[32])

In Ausdrücken wie $B \sin(b + m\beta)$ ist es offenbar viel wichtiger, die β als die b möglichst genau zu kennen. Man kann, um die β mittelst der b zu verbessern, so verfahren: man wählt zunächst zwei $T_0 (T'_0, T''_0)$ an passenden möglichst weit abstehenden Stellen der Daten aus und berechnet mit Hilfe der provisorischen $\beta_\varkappa$ die entsprechenden $b'_\varkappa$, $b''_\varkappa$. Es besteht dann die Beziehung

$$(85)\quad b'_\varkappa + m\beta_\varkappa = n \cdot 2\pi + b''_\varkappa \text{ oder es ist: } \beta_\varkappa = \frac{b''_\varkappa - b'_\varkappa + n \cdot 2\pi}{m}$$

Das m ergibt sich aus dem Abstand der T'_0 und T''_0. Das n kann man aus den Werten von m und dem angenommenen $\beta_\varkappa$ ermitteln. Dieses Verfahren läßt sich mit der Verwendung der neuen $\beta_\varkappa$ abermals wiederholen, bis sich die $\beta_\varkappa$ nicht mehr verändern. Es ist dann anzunehmen, daß die dadurch gewonnenen β die richtigen sind, wenigstens die besten β, welche sich bei der Genauigkeit der zur Bestimmung des $b'_\varkappa$, $b''_\varkappa$ verwendeten Daten finden lassen.

§ 26.

Elimination der Wirkung[33]) **eines bekannten periodischen Bestandteils aus den Daten.**

Betrachten wir die erzeugende Funktion und die entsprechende rekurrente Reihe

$$(86)\quad \frac{Z}{N} = \frac{Z}{N_1 \cdot V} = T_0 + T_1 x + \ldots . T_m x^m + \ldots \text{ wo Z, N, } N_1, \text{ V}$$

vom Grade, bezw. $n-1$, n, m, $n-m$

sind. Multiplizieren wir mit V, so erhalten wir, weil $\frac{Z^{(n-1)}}{N_1^{(n-m)}}$ ein unechter Bruch ist,

$$\frac{Z^{(n-1)}}{N_1^{(n-m)}} = a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a_0 + \frac{Z_1^{(n-m-1)}}{N_1^{(n-m)}}$$

$$= T'_0 + T'_1 x + \ldots T'_m x^m + \ldots$$

[32]) VI § 43.

[33]) VI § 20, § 46.

(87) D. h. $\frac{Z_1^{(n-m-1)}}{N_1^{(n-m)}} = (T'_0 - a_0) + (T'_1 - a_1)\,x + \ldots$

$(T'_{m-1} - a_{m-1})\,x^{m-1} + T'_m\,x^m + T'_{m+1}\,x^{m+1} + \ldots .$

Daraus ersieht man, daß die T'_m Reihenfolge von dem Glied T'_m an, d. h. nach den m ersten Gliedern die Glieder einer rekurrenten Reihe darstellt, deren Skala, durch N_1 gegebenen ist. Will man infolgedessen die Wirkung eines bekannten Periodenwinkels $\beta_\varkappa$ aus den Daten eliminieren, so multipliziert man die Reihe mit $1 - 2\cos\beta_\varkappa\,x + x^2$, streicht die ersten zwei d. h. x^0 und x^1 Glieder aus, und dividiert mit x^2. Dabei hat man eine neue rekurrente Reihe gewonnen, deren ζ die unbekannten ζ der ursprünglichen T Reihe sind.

Ähnlicherweise wäre zu verfahren, um irgend eine bekannte Komponente aus den Daten zu eliminieren.

§ 27.

Näherungswerte der Periodenwinkel mittels der Differenzen.

Betrachtet man die geraden zu derselben Zeile 1 gehörenden Differenzen der Zahlenfolge $\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa\,\zeta_\varkappa$ [vgl. (34)], so sieht man, daß diese sich so schreiben lassen: $\Delta_1^{2m} = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa\,\zeta_\varkappa^1\left[\frac{(\zeta_\varkappa-1)^2}{\zeta_\varkappa}\right]^m$

Mit wachsenden m wird in dieser Summe der Bestandteil mit dem größten $\frac{(\zeta_\varkappa-1)^2}{\zeta_\varkappa}$ über alle anderen immer stärker überwiegen. Infolgedessen wird sich der Quotient $\frac{\Delta_1^{2m}}{\Delta_1^{2(m-1)}}$ schließlich den Grenzwert $\frac{(\zeta_\varkappa-1)^2}{\zeta_\varkappa}$ nähern. Eine ähnliche Betrachtung der ungeraden Differenzen führt zu demselben Schluß. Im Fall lauter reeller T ist dieser Wert $-\left(2\sin\frac{\beta_\varkappa}{2}\right)^2$.

Untersucht man nun eine Zahlenfolge und stellt sich heraus, daß die obigen Quotienten einen Grenzwert besitzen, so stellt derselbe den Wert $-\left(2\sin\frac{\beta_\mu}{2}\right)^2$ dar. Dabei liegt dieses β_μ dem Wert 180° näher als irgend ein anderes β.

Ähnlicherweise läßt sich mit Verwendung von um ν voneinander abstehenden T dasjenige β bestimmen, das am nächsten an $\frac{2n+1}{\nu}\,180^0$ liegt.

Lagrange hat diese Methode vorgeschlagen, um die Periodenwinkel angenähert zu bekommen. Bei einer Schätzung ihres praktischen Wertes darf man den Einfluß der $c_\varkappa$ und auch die Fehlerhäufung bei der Differenzrechnung nicht übersehen. (§ 39a.)

§ 28.

Es stehen uns also nunmehr Methoden zur Verfügung, um Daten zu untersuchen, die für Parameterwerte gegeben sind, welche eine arithmetische Reihe bilden. Mit Hilfe notwendiger Bedingungen suchen wir zunächst zu ermitteln, ob die Daten eine rekurrente Eigenschaft besitzen können. Stellt sich die Wahrscheinlichkeit einer solchen Beschaffenheit heraus, so ermöglichen uns unsere Methoden weiterhin, die Daten in ihre Bestandteile zu zerlegen. Diese Bestandteile lassen sich ausdrücken als Konstante, algebraische Polynome, Exponential-, hyperbolische oder trignometische Funktionen oder als Produkte irgend welcher derselben. Für lauter reelle T ist die Form, welche alle Möglichkeiten einschließt, $\sum_{\lambda=1}^{\mu} C_{\varkappa\lambda}\, m^{\lambda-1}\, e^{m\alpha_\varkappa} \sin\,(b_{\varkappa\lambda} + m\,\beta_\varkappa)$ [34]) worin m den Parameter darstellt und alle ganzzahligen Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ annehmen kann. Irgend eine Erscheinung, deren Gesetz mittels einer homogenen linearen Differentialgleichung ausgedrückt werden kann, bildet theoretisch einen Gegenstand für die Anwendung unserer Methoden.

---

[34]) Dieses ist die allgemeinste Form, welche die Theorie der Planetenbewegung erfordert. VI p. 524.

Drittes Kapitel.

Erproben der angegebenen Methoden an Beispielen bei Verwendung vollständig bekannter Daten.

§ 29.

Erproben der Methoden bei verschieden genauen Daten.

Wir betrachten zunächst eine Anzahl von Berechnungen, welche mit berechneten Daten von verschiedenen Genauigkeitsgraden durchgeführt worden sind. Wir bezwecken damit folgendes:

a) Beispiele dafür zu geben, wie bei jeder Methode die Perioden zu finden sind.

b) Die Art und Weise zu untersuchen, wie Fehler auftreten und sich fortpflanzen können, und zwar an der Hand von Berechnungen mit Daten, die bis 5 resp. nur 3 Ziffern korrekt sind.

c) Die Ergebnisse von $\frac{1\,|\,1}{3\,|\,3}$ und $\frac{1\,|\,1}{3\,|\,4}$ (siehe S. 5) Rechnungen miteinander zu vergleichen, um Aufschluß darüber zu bekommen, bis wieviel Dezimalstellen die Rechnungen ausgeführt werden sollen.

d) Einen Einblick in die Art des Verschwindens der Reste (§ 11) bezw. der Determinanten (§§ 12—14) zu gewinnen, wenn eine rekurrente Reihe untersucht werden soll. Schließlich die Beantwortung der Fragen:

e) Wie groß darf n sein bei $\overline{3\,|}\ P_n$ Daten, um die Bestandteile noch bestimmen zu können?

f) Ist es vorteilhaft, Summen an Stelle der einfachen Daten zu benützen?

g) Für welche Funktionen eignen sich diese Methoden?

h) Welche Wirkung hat es, wenn man bei Verwendung von $\underline{|^k}$ Daten k voneinander verschieden annimmt?

i) Wie unterscheiden sich die K. B.-, Diff.- und R. S.-Methoden in Bezug auf Genauigkeit der Resultate und Bequemlichkeit der Anwendung?

§ 30.

Die Fehler beim Divisionsverfahren.

Bei der praktischen Ausführung der Rechnungen bilden die verschiedenen Divisionsverfahren die Hauptquelle der wegen der Ungenauigkeit der Daten eintretenden Fehler. Wenn z und n die Fehler des Zählers bezw. des Nenners darstellen, dann gilt:

$$\frac{Z+z}{N+n} \sim \frac{Z}{N} + \frac{z}{N} - \frac{Z}{N} \cdot \frac{n}{N}.$$

Man sieht, daß ein verhältnismäßig großes N wünschenswert ist. Ein zunächst günstiges kleines Z kann aber einen späteren Nachteil insofern bewirken, als schließlich ein kleiner Divisor eintreten kann. Bei Verwendung von $\overline{3}$ Daten ist etwa zu erwarten:

$$Z \sim N \sim 500\,; \; z \sim n \sim \frac{0 + .5}{2} \sim 0.25.$$

Daraus schließt man, daß nach einer Division mit solchen Daten ein beträchtlicher Fehler in der vierten Stelle zu erwarten ist, und zwar ein Fehler von etwa $\frac{1}{2}\,\%$. Wenn der Zähler im Vergleich zu N klein ist, dann rührt der Fehler hauptsächlich von z her und ist von der Größe $\frac{z}{N} = \frac{10^r}{10^s} = 10^{r-s}$.

Die Berechnungen werden Gelegenheit geben, das Auftreten der Fehler zu verfolgen. Man muß sich jedoch vor Täuschungen in acht nehmen. So kann z. B. ein System von scheinbar kleinen bezw. großen Resten wohl die Folge eines in der Rechnung früher aufgetretenen großen bezw. kleinen Divisors sein, was namentlich bezüglich der Reste in den K.B.-Methoden und des absoluten Betrages der Determinanten in den anderen Methoden gilt.

§ 31.

Die P_2-Funktion,

$$T_m = 3 \sin(60^0 + m\,50^0) + 5 \sin(70^0 + m\,35^0).$$

Die Werte von T_m und von den $\overline{5|1}$ Daten (siehe Fig. 3).

m	$\overline{\frac{1}{6}}$ Daten	$\overline{\frac{1}{3}}$ Daten	$\overline{\frac{5}{6}}$ Daten	$\overline{\frac{5}{3}}$ Daten
0	+ 7.29654	+ 7.30^{-3}		
1	+ 7 64872	+ 7.65^{-1}		
2	+ 4.24001	+ $4.24^{\ 0}$	+ 12.66664	+ 12.68^{-13}
3	— 1.06420	— 1.06^{+4}	— 1.45957	— 1.45^{+10}
4	— 5.45443	— 5.45^{+4}	— 14.03234	— 14.02^{+12}
5	— 6.82967	— 6.83^{-0}	— 19.50978	— 19.50^{+10}
6	— 4 92405	— 4.92^{+4}	— 16.35940	— 16.35^{+9}
7	— 1.23743	— 1 24^{-3}	— 7.29187	— 7.29^{+2}
8	+ 2.08618	+ 2.09^{-4}	+ 2.84189	+ 2.84^{+2}
9	+ 3.61310	+ 3 61^{+3}	+ 9.92782	+ 9.92^{+8}
10	+ 3.30409	+ 3.30^{+4}	+ 12.39736	+ 12.39^{+7}
11	+ 2.16188	+ 2.16^{+2}	+ 11.08433	+ 11.07^{-14}
12	+ 1.23211	+ 1.23^{+2}	+ 7.68950	+ 7.68^{+10}
13	+ 0.77315	+ 0.77^{+3}	+ 3.28966	+ 3.28^{+10}
14	+ 0.21827	+ 0.22^{-2}	— 1.94385	— 1.95^{-6}
15	— 1.09575	— 1.10^{-4}	— 7.79266	— 7.80^{-7}
16	— 3.07163	— 3.07^{+2}	— 12.87400	— 12.88^{-6}
17	— 4.61670	— 4.62^{-3}	— 14.61724	— 14.62^{-3}
18	— 4.30819	— 4.31^{-2}	— 10.71735	— 10.72^{-3}
19	— 1.52497	— 1.52^{+5}		
20	+ 2.80414	+ 2.80^{+4}		

Diese Funktion wurde mit Hilfe einer fünfstelligen Sinustafel ausgewertet. Ein beträchtlicher Fehler ist daher in den 5 ten Dezimalstellen der $\overline{6}|$ Daten zu erwarten. Dagegen sind die $\overline{3}|$ Daten korrekt bis auf drei Ziffern. Die kleinen Indizes geben die in der 3 ten Dezimalstelle auftretenden Fehler an. Die untenstehende Tafel zeigt die Art der Fehlerhäufung bei Bildung von neuen Zahlen aus den ursprünglichen.

	Durchschnittswert der Terme	Größter Fehler	Durchschnittsfehler
a)	3.31	.005	.0028
b)	9.79	.014	.0078
c)	4.36	.009	.0038
d)	12.33	.022	.0105

Erläuterungen:

a) Für die 21 urspr. Terme.

b) Für 17 Fälle $\underline{5}|$ Daten.

c) Für 60 Fälle, in welchen zwei Glieder addiert wurden, um die S_j zu bilden.

d) Für 33 Fälle derselben Art, aber bei Benutzung von $\underline{5}|$ Daten.

Man bemerkt:

a) Bei einfachen Termen entspricht der Fehler ungefähr dem zu erwartenden Fehler, nämlich .0025 d. h. $\frac{0.+.005}{2}$.

b) Obgleich sich in den Fällen von 2 bezw. 5 Summen der Durchschnittsfehler nicht 2 bezw. 5 mal vergrößert hat, so ist das Resultat im Vergleich mit dem neuen Durchschnittsglied doch nicht günstiger als im Falle einfacher Daten. Deshalb scheint der Vorteil bei Verwendung von Summen ein geringer zu sein. Wenn es sich um ungenau beobachtete Daten handelt, kann es zweckmäßig sein, die Fehler zu verteilen.

Mit diesen Daten wurden dann die Berechnungen zur Ermittlung der Skalen und der Periodenwinkel durchgeführt und zwar für folgende Fälle:

Fall	Methode	Art der Daten	Angenommenes T_0, d. h. Wert von m oben.
1 2	S_a S_b	$\frac{1}{6}\vert\frac{1}{7}$	11
3 4	S_c S_d	$\frac{1}{6}\vert\frac{1}{6}$	10
5 6 7 8	S_a, S_b, S_c, S_d	$\frac{1}{3}\vert\frac{1}{4}$	Für S_a, S_b, m = 11
9 10 11 12	„ „	$\frac{1}{3}\vert\frac{1}{3}$	„ S_c, S_d, m = 10
13 14 15 16	„ „	$\frac{5}{3}\vert\frac{1}{4}$	
17 18 19 20	„ „	$\frac{1}{6}\vert\frac{2}{6}$	
21 22 23 24	„ „	$\frac{1}{3}\vert\frac{2}{4}$	
25	Differenz	$\frac{1}{6}\vert\frac{1}{6}$	Die Differenzzeile m = 10 entsprechend
26	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{1}{4}$	D. h. Δ^0_{10} bis Δ^9_{10}.
27	„	$\frac{1}{6}\vert\frac{1}{6}$	Δ^0_9 bis Δ^6_9; Δ^0_{10} bis Δ^6_{10}; Δ^0_{11} bis Δ^6_{11}; Δ^0_{12} bis Δ^6_{12}
28	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{1}{4}$	Gerade Differenzen allein benützt.
29	„	$\frac{1}{6}\vert\frac{2}{6}$	Dasselbe wie 25, 26.
30	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{2}{4}$	
31	„	$\frac{1}{6}\vert\frac{2}{6}$	Δ^0_6 bis Δ^6_6; Δ^0_8 bis Δ^6_8; Δ^0_{10} bis Δ^6_{10}; Δ^0_{12} bis Δ^6_{12}
32	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{2}{4}$	Gerade Differenzen allein benützt.
33	R.S.-Methode	$\frac{1}{6}\vert\frac{1}{6}$	4 R. S.-Gleichungen mit den Zentren
34	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{1}{4}$	m = 9, 10, 11, 12.
35	„	$\frac{1}{6}\vert\frac{2}{6}$	4 R. S.-Gleichungen mit den Zentren
36	„	$\frac{1}{3}\vert\frac{2}{4}$	m = 6, 8, 10, 12.

Von den Berechnungen wird nur das Nötige gegeben werden, um die Art der Rechnungen zu erklären und besondere Punkte hervorzuheben. Manchmal sind die mit $\overline{3}$ und $\overline{6}$ Daten ausgeführten Rechnungen in aufeinanderfolgenden Zeilen dargestellt, um die Fortpflanzung der Fehler bei dreistelligen Daten sichtbar zu machen.

§ 32.

Die Berechnungen nach den K. B.-Methoden (siehe § 11).

Es folgen einige ausgewählte K. B.-Rechnungsarten. Sie geben hauptsächlich über die Art des Verschwindens der Reste und die der Fehlerfortpflanzung Aufschluß.

Die Schritte bei den Berechnungen der Erzeugenden einer S_j Reihe nach den Lagrange'schen K. B. Methoden.

(1) S_j Reihe
(2) Erster Divisor, $\frac{S_j}{d_1}$
(3) „ Dividend
(4) „ Quotient
(5) (2) $\times (1 + x^2)$
(6) (3) — (6), Rest
(7) (2) $\times p_1$
(8) (6) — (7), erster Rest, R_1
(9) Zweiter Divisor, (8) $\div d_2$
(10) „ Dividend (2)
(11) „ Quotient
(12) (9) $\times (1 + x^2)$
(13) (10) — (12) Rest
(14) (9) $\times p_2$
(15) (13) — (14), zweiter Rest, R_2
(16) Zähler der erzeugenden Fkt.
(17) Nenner „ „

Die Hauptschritte bei verschiedenen Berechnungen der Erzeugenden einer S_a Reihe.

Fälle 1, 5, 9. Zuerst folgen $\frac{1|1}{6|6}$ Berechnungen, darauf $\frac{1|1}{3|4}$ Berechnungen und schließlich die $\frac{1|1}{3|3}$ Berechnungen.

S_a Die Zeilennumerierungen beziehen sich auf die des obigen Beispiels.

(2)
1. + .8864319 x + .5231148 x^2 — .1864555 x^3 — 1.1013232 x^4 — 1.8114443 x^5 — 1.8425147 x^6 | d_1 + 5.46597
1 + .8864 + .5238 — .1868 — 1.1026 — 1.8132 — 1.8443 | + 5.46^{+6}
1 + .886 + .524 — .187 — 1.103 — 1.813 — 1.844 | + 5.46^{+6}

(8)
0. + .1490792 + .2868442 + .2264728 — .0796716 — .4733288
0 + .1483 + .2885 + .2264 — .0799 — .4735
0 + .147 + .289 + .226 — .080 — .472

(9)
1 + 1.9241061 x + 1.5191442 x^2 — .5344247 x^3 — 3.1750157 x^4 | d_2 + .1490792
1 + 1.9454 + 1.5266 — .5388 — 3.1929 | + .1483
1 + 1.966 + 1.537 — .544 — 3.211 | + .147

(15)
+ .0005659 x^2 + .0002398 x^3 — .0000104 x^4
+ .0574 + .0233 — .0069
+ .110 + .051 — .017

(4)
1 — 1.8864319 x + x^2
1 — 1.8864 x + x^2
1 — 1.886 x + x^2

(11)
1 — 1.0376742 x + x^2
1 — 1.0590 x + x^2
1 — 1.080 x + x^2

(17)
(1 + x^2) (1 — 2.9241061 y + 2.1065809 y^2)
(„) (1 — 2.9454 y + 2.1460 y^2)
(„) (1 — 2.966 y + 2.184 y^2)

Fälle 19, 23. Dasselbe für S_c bei Benutzung $\frac{|2}{6|6}$ und $\frac{|2}{3|4}$ Daten.

(2)
1 + 2.858803 x — .799807 x^2 — 7.493032 x^3 — 2.151017 x^4 | d_1 + 1.23211
1 + 2.8618 x — .7967 — 7.5041 — 2.1545 | + 1.23^{+2}

(9)
+ 1 + .336711 — 2.648994 | d_2 + 6.972562
+ 1 + .3381 — 2.6514 | + 6.9866

(15)
— .000029
+ .0014

(4)
1 — 2.858803 x + x^2
1 — 2.8618 x + x^2

(11)
1 + 2.522092 x + x^2
1 + 2.5237 x + x^2

(17)
(1 + x^2) (1 — .336711 y — .237602 y^2)
(„) (1 — .3381 y — .2357 y^2)

§ 33.

Das Rechnen nach der Diff.-Methode (siehe § 12).

Um einen Einblick in das Verhalten der Differenzen zu bekommen, geben wir die mit Δ^0_{10} anfangenden geraden Differenzzeilen für $\frac{1}{3}\Big|\frac{1}{-}$ und $\frac{1}{6}\Big|\frac{1}{-}$ Daten und dann für $\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{-}$ und $\frac{1}{6}\Big|\frac{2}{-}$ Daten wieder.

$\frac{1}{3}\Big|\frac{1}{-}$ und $\frac{1}{6}\Big|\frac{1}{-}$ Daten

Δ^0_{10}	Δ^2_{10}	Δ^4_{10}	Δ^6_{10}	Δ^8_{10}	Δ^{10}_{10}	Δ^{12}_{10}
+ 3.30	— .83	+ .04	+ .16	— .10	—.38	+ 2 60
+ 3.30 409	— .83 320	+ .04 291	+ .16 888	— .19 200	+ .16 010	— .11 235

$\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{-}$ und $\frac{1}{6}\Big|\frac{2}{-}$ Daten

+ 3.30	— 3.28	+ 1.82	+ 3.48	— 18.43	+ 57.00
+ 3.30 409	— 3.28 989	+ 1.84 560	+ 3.40 117	— 18 15 948	+ 56.01 360

Man beachte die Fehlerfortpflanzung bei dreistelligen Daten und auch das mit wachsendem n stattfindende Abnehmen bezw. Zunehmen der Δ^n_{10} in den beiden Fällen.

Es folgen Rechnungen für die Fälle (25—26). Man vergleiche die obigen Δ^n_{10} und ihre entsprechenden Gleichungen in dem R'_2-Systeme.

Die Eliminationen für die Diff.-Methode bei Verwendung von $\frac{1|1}{6|6}$ und $\frac{1|1}{3|4}$ Daten:

I.

Das R'-System.

(1)	+ 3.30409 r'_2	— .83320 r'_1	+ .04291	+ .16888
(1)′	+ 3.30	— .83	+ .04	+ .16
(2)	— .72560	+ 1.02418	— .91462	+ .71947
(2)′	— .73	+ 1.02	— .90	+ .67
(3)	— .83320	+ .04291	+ .16888	— .19200
(3)′	— 0.83	+ .04	+ .16	— .10
(4)	+ 1.02418	— .91462	+ .71947	— .53743
(4)′	+ 1.02	— .90	+ .67	— .37

Man dividiere jede Gleichung durch den ersten Koef. und erhält:

II.

(5)	1	— .252172	+ .012987	+ .051112
(5)′	1	— .2515	+ .0121	+ .0485

(6)	1	— 1.411494	+ 1.260502	— .991552
(6)′	1	— 1.3973	+ 1.2329	— .9178
(7)	1	— .051500	— .202688	+ .230437
(7)′	1	— .0482	— .1928	+ .1205
(8)	1	— .893027	+ .702484	— .524742
(8)′	1	— .8824	+ .6569	— .3627

Man subtrahiere aufeinanderfolgende Gleich. um r'_2 zu eliminieren:

III.

(9)	0	+ 1.159322	— 1.247515	+ 1.042664
(9)′	0	+ 1.1458	— 1.2208	+ .9663
(10)	0	+ 1.359994	— 1.463190	+ 1.221989
(10)′	0	+ 1.3491	— 1.4257	+ 1.0383
(11)	0	+ .841527	— .905172	+ .755179
(11)′	0	+ .8342	— .8497	+ .4832

Man dividiere wieder durch den ersten Koef. und erhält:

IV.

(12)	$1\ r'_1$	— 1.076073	+ .899374
(12)′	1	— 1.0655	+ .8433
(13)	1	— 1.075880	+ .898525
(13)′	1	— 1.0568	+ .7696
(14)	1	— 1.075630	+ .897391
(14)′	1	— 1.0186	+ .5792

§ 34.

Die Berechnungen nach der R.S.-Methode (siehe § 14).

Es folgen hier Rechnungen für die Fälle (35—36). Die Elimination geht wie in § 33 vor sich. Die zweite Subtraktion wird nicht ausgeführt, weil die Übereinstimmung in den 3ten, 4ten usw. Kolonnen ersichtlich ist.

Die r'_n bezw. r_n wurden dann mittels einer „Durchschnittslösung" (siehe § 13) bestimmt. Bei der Ausführung dieser Lösung verwendet man für gewöhnlich die Systeme, deren linke Kolonnen aus lauter 1 bestehen. Ist es aber wahrscheinlich, daß irgend welche der Gleichungen dadurch ein unangemessenes Gewicht erhalten, dann verwendet man besser das nächst obenstehende System. Man kann immer offensichtlich ungünstige Gleichungen vernachlässigen, um die möglichst besten Werte zu bekommen.

Die R. S.-Methode auf $\frac{|2}{6|6}$ und $\frac{|2}{3|4}$ Daten angewendet:

I.

Das P-System.

(1)	$-4.92405\,p_2$	$-3.36825\,p_1$	$+7.54410$	$+8.52865$
(1)′	-4.92	-3.36	$+7.54$	$+8.53$
(2)	$+2.08618$	-1.61996	-4.22232	$+4.45828$
(2)′	$+2.09$	-1.62	-4.22	$+4.46$
(3)	$+3.30409$	$+3.31829$	-4.70578	-8.52606
(3)′	$+3.30$	$+3.32$	-4.70	-8.52
(4)	$+1.23211$	$+3.52236$	$-.98545$	-9.23224
(4)′	$+1.23$	$+3.52$	$-.98$	-9.23

Schließlich erhält man:

IV.

(12)	$1\,p_1$	$+.336758$	-2.649046
(12)′	1	$+.3337$	-2.6527
(13)	1	$+.336766$	-2.649069
(13)′	1	$+.3340$	-2.6477
(14)	1	$+.336705$	-2.648996
(14)′	1	$+.3381$	-2.6524

§ 35.

Resultate der in §§ 31—34 ausgeführten Berechnungen.

Die untenstehende Tafel gibt die y-, z-, ξ-Gleichungen an, wie dieselben in den 36 Fällen bestimmt wurden.

K. B.-Methoden.

$\frac{1}{y}$-Gleichungen.*

Fall		$\frac{|1}{1|}$ Daten.	
1	S_a	$1\,y'^{|2} - 2.9241061\,y' + 2.1065809$	
5	„	2.9454	2.1460
9	„	2.966	2.184
2	S_b	2.9254987	2.1078340
6	„	3.0071	2.2006
10	„	2.974	2.166
3	S_c	2.925185	2.108423
7	„	2.9902	2.2223
11	„	3.040	2.308
4	S_d	2.923723	2.106108
8	„	2.8855	2.0976
12	„	2.886	2.098

* Die fetten Ziffern sind um 5 oder mehr falsch.

$\frac{1}{y}$-Gleichungen.*

Fall			
		5|1 Daten.	
13	S_a	$1\ y'^2 - 2.9251\ y'$	$+ 2.1084$
14	S_b	3.1004	2.1913
15	S_c	3.2455	2.6491
16	S_d	2.9187	2.0926
		1|2 Daten.	
17	S_a	$1\ y'^2 - 0.336745$	$- 0.237559$
21	„	$.3359$	$.2389$
18	S_b	$.336272$	$.237576$
22	„	$.3760$	$.2392$
19	S_c	$.336711$	$.237602$
23	„	$.3381$	$.2357$
20	S_d	$.336751$	$.237559$
24	„	$.3349$	$.2409$

Differenzmethode.

ξ-Gleichungen.

Fall	1|1 Daten.	
25	$1\ \xi^2 + 1.076073\ \xi$	$+ 0.258368$
26	1.0655	$.2559$
27	1.076149	$.258421$
28	1.0672	$.2578$
	1|2 Daten.	
29	$1\ \xi^2 + 3.663263\ \xi$	$+ 3.088937$
30	3.6644	3.0904
31	3.663256	3.088963
32	3.6647	3.0891

Reziprokeskalamethode.

z-Gleichungen.

	1|1 Daten.	
33	$1\ z^2 - 2.923846\ z$	$+ 2.106114$
34	2.9330	2.1237
	1|2 Daten.	
35	$1\ z^2 - 0.336743\ z$	$- .237548$
36	$.3353$	$.2404$

* Die fetten Ziffern sind um 5 oder mehr falsch

§ 36.

Vergleichung der Fehler in den Ergebnissen der verschiedenen Rechnungen in §§ 31—34.

A. Unter (a) stehen die Fehler der cos bezw. sin der zu bestimmenden Winkel.

„ (b) „ „ Winkelfehler selbst. ($\beta_1 = 50^0$; $\beta_2 = 35^0$.)

Daten	Fall		Kettenbruchmethoden. S_a (a)	S_a (b)	S_b (a)	S_b (b)	S_c (a)	S_c (b)	S_d (a)	S_d (b)	Daten	Fall	Differenzmethode. (a)	(b)	Daten	Fall	Reziprokeskalamethode. (a)	(b)
$\frac{1}{6}\vert\frac{6-7}{}$	1	1—4	β_1 .00018	0′ 49″	.00058	2′ 35″	.00082	3′ 41″	.00021	0′ 55″	$\frac{1\ 1}{6\vert 6}$	25 β_1	.00000	0′ 00″	$\frac{1\vert 1}{6\ 6}$	33 β_1	.00001	0′ 03″
	„		β_2 .00006	0′ 22″	.00139	8′ 21″	.00017	1′ 04″	.00028	1′ 42″			β_2 .00003	0′ 12″			β_2 .00001	0′ 04″
											$\frac{1\vert 1}{6\vert 6}$	27 β_1	.00000	0′ 00″				
													β_2 .00000	0′ 00″				
	2	17—20	β_1 .00000	00″	.00008	0′ 08″+	.00002	0′ 02″	.00001	00″	$\frac{1\ 2}{6\ 6}$	29 β_1	.00001−	0′ 02″	$\frac{1\ 2}{6\vert 6}$	35 β_1	.00001	0′ 01″
	„		β_2 .00000	00″	.00015	16′+	.00001	01″	.00000	00″			β_2 .00001−	0′ 01″			β_2 .00001	0′ 01″
											$\frac{1\vert 2}{6\vert 6}$	31 β_1	.00000	0′ 00″				
													β_2 .00000	0′ 00″				
$\frac{1}{3}\vert$	$\frac{1}{4}$	5—8	β_1 .018	1°21′	.014	1°01′	.047	3°40′			$\frac{1\ 1}{3\ 4}$	26 β_1	0043	0°32′	$\frac{1\vert 1}{3\vert 4}$	34 β_1	.0084	0°38′
	$\frac{1}{3}$	9—12	β_1 .037	2°49′	.005	24′	.092	7°21′	Komplexe				β_2 .0016	12′			β_2 .0039	23′
	$\frac{1}{4}$	5—8	β_2 .007	42′	.055	5°58′	.014	1°26′	Wurzeln.		$\frac{1\vert 1}{3\vert 4}$	28 β_1	.0050	38′				
	$\frac{1}{3}$	9—12	β_2 .016	1°34′	.031	3°09′	.035	3°20′					β_2 .0032	24′				
	$\frac{2}{4}$	21—24	β_1 .0008	01′+	.0056	10′	.0011	02′	.0020	04′	$\frac{1\ 2}{3\vert 4}$	30 β_1	.0002	01′	$\frac{1\ 2}{3\ 4}$	36 β_1	.0017	0°03′
	$\frac{2}{4}$		β_2 .0004	00+	.0140	26′	0004	01′	.0010	02′			β_2 .0000	00′			β_2 .0009	02′
											$\frac{1\vert 2}{3\vert 4}$	32 β_1	.0006	03′				
													β_2 .0004	02′				
$\frac{5}{3}\vert$	$\frac{1}{4}$	13—16	β_1 .0010	04′	.0978	6°59′	Komplexe		.0094	42′								
			β_2 .0004	02′	.1860	$\cos\beta_2 > 1$	Wurzeln		.0068	41′								

B. Die nach Durchführung der Rechnung bis zu zwei Perioden verbleibenden Reste R_2.

		S_a			S_b			S_c			S_d		
$\frac{1}{6}\frac{1}{6}$–7	1—4 (1)	+ 00057,	+ .00024,	— .00001	+ 00539	+ .01255	+ .01628	+ .00335	+ .00454	+ .00198	+ .00066	— .00083	— 00076
$\frac{1}{6}\frac{2}{6}$	17—20 (2)	— .00001			— .00104			— .00003					
$\frac{1}{3}\frac{1}{4}$	5—8 (3)	+ .0574	+ 0233	— .0069	+ 7632	+ .0392	+1 0903	+ 4143	— .1034	+ .4232	— .1556	— .2317	— .2153
$\frac{1}{3}\frac{1}{3}$	9—12 (4)	+ .110	+ .051	— .017	+ .644	— .220	+ .768	+ .534	+ .091	+ .503	— .153	— .227	— .217
$\frac{1}{3}\frac{2}{4}$	21—24 (5)	+ .0003			+ .0541			+ .0014					
$\frac{5}{3}\frac{1}{4}$	13—16 (6)	+ .0045	— .0055		+ .7888	+1.6305		+1.0811			— .0055		

Die entsprechenden absoluten Reste $d_1 d_2 R_2$. (Siehe F. N. 18.)

(1)	.00046	.00019	.00001	.00069	.00161	.00209	.00056	.00076	.00033	.00070	.00088	.00081
(2)	.000055			.000421			.00025					
(3)	.046	.019	.0056	.098	.005	.141	.070	.018	.072	.167	.248	.230
(4)	.088	.041	.014	.084	.029	.100	.088	.015	.083	.164	.243	.232
(5)	.0021			022			.012					
(6)	.0055	.0067		.54	1.11		.28			.048		

Die in der 3ten Kolonne nach 2 Eliminationen verbleibenden Reste.

Differenzmethode.			Reziprokeskalamethode.		
Fall			Fall		
25	.00019	.00025	33	.00025	.00009
27	.00027	.00007			
29	.00001	.00002	35	.00001	.00006
31	.00001	.00006			
26	.0087	.0382	34	.0110	.0030
28	.0116	.0024			
30	.0005	.0006	36	.0003	.0041
32	.0003	.0041			

§ 37.

Bemerkungen zu diesen Resultaten.

Es sei von vornherein gesagt, daß dieses Beispiel* eher die schwachen Seiten der verschiedenen Methoden hervorkehrt als ihre Vorzüge. Die Kos. der Winkel sind so nahe einander gleich, daß die Diskriminante der Skalagleichung einen recht kleinen Wert hat, weswegen imaginäre Wurzeln leicht auftreten können. Beide Winkel sind verhältnismäßig klein, weswegen sukzessive Terme oft auf der Kurve nahe zusammengerückten Punkten entsprechen, kleine Differenzen ergeben und so konnte oft eine P_1-Funktion einem beträchtlichen Teil der Kurve angepaßt werden.

Von weiteren Schlüssen, die man aus dieser Gruppe von Beispielen ziehen kann, seien hervorgehoben:

a) Vorzüge der 3 Methoden.

Für die ungünstigen Verhältnisse bei Verwendung von $\overline{3|}$ Daten und $\underline{|1}$ Daten sind die K.B.-Methoden weit weniger vorteilhaft; für günstige dagegen sind alle Ergebnisse etwa gleich.

b) Vorzüge der verschiedenen K.B.-Methoden.

Daß S_a am meisten, S_b am wenigsten zuverlässig erscheint, ist wohl Zufall. Anordnungen der Daten, die sich für S_a (Addition) eignen, können für die Behandlung durch S_b (Subtraktion) ungünstig sein. S_d scheint an der Richtigkeit der Resultate gleich nach S_a zu kommen.

Um die Willkürlichkeiten, die bei numerischen Berechnungen auftreten können, zu beleuchten, sei erwähnt: S_d gibt keine reellen Wurzeln in den Fällen (8) (12), obgleich die dazugehörige Skalagleichung besser ist als einige der anderen. Der große Fehler, der bei dem 2. Term dieser S_d-Folge, $-0{,}86^{-6}$, auftritt, wächst derart an, daß schließlich der Koeffizient von y um 0,04 zu klein wird. Alle anderen Fälle von $\overline{3|}$ Daten ergaben einen zu großen Koeffizienten. Viele der schlechten Resultate kommen von den kleinen Werten der d_2 her. Z. B. hatten sich in (15) bedeutende Fehler schon in der ursprünglichen S_c-Reihe angehäuft, nämlich $+,007, +,022, +,011, -,008$; welche das kleine $d_2 = 0{,}0209$ um 50 % verändern könnten. Ein kleines d_2 wirkt in (3) (7) (11)

* Dagegen ist das von Lagrange mit großen Amplituden und Periodenwinkeln 70° und 140° durchgeführte Beispiel für die Methoden besonders günstig (Fußnote 2).

deswegen nicht so verhängnisvoll, weil der Übergang zu 3-stelligen Zahlen einen prozentual geringeren Fehler verursacht und in (13) wahrscheinlich darum nicht, weil die Fehler in der ursprünglichen Folge mit den entsprechenden Termen ungefähr proportional sind. Schlechte Übereinstimmung in (18) rührt wahrscheinlich vom kleinen d_2 her.

c) Die letzten Reste.

(Vgl. § 32, Zeile 15 der Rechnungen, auch §§ 33, 34 und 36.)

Die 6-ziffrigen Daten dürften in der 5. Dezimalstelle unsicher sein; die 3-ziffrigen in der 3. Stelle. Für unsere angenommene P_2-Funktion sollten die zweitletzten Reste R_3 theoretisch null sein. Eine Betrachtung aller dieser Reste zeigt, daß der erste Fehler im Durchschnitt für $\frac{|1}{6|}$; $\frac{|1}{3|}$; $\frac{|2}{6|}$; $\frac{|2}{3|}$ Daten resp. in der $3\frac{1}{2}$; $1\frac{4}{10}$; $4\frac{1}{3}$; $3\frac{1}{3}$ Dezimalstelle auftritt. Der Fehler ist daher bei den Berechnungen mit $\underline{|1}$ Daten um etwa $1\frac{1}{2}$—2 Dezimalstellen nach links gerückt. Für die Berechnungen mit $\underline{|2}$ Daten ist das Verschwinden bedeutend besser, oft nahezu gleich dem der ursprünglichen Daten, d. h. bis auf die 3. bezw. 6. Dezimalstelle. Eine ähnliche Betrachtung des Verschwindens der dritten Kolonnen bei den Diff.- und R.S.-Methoden ergibt für die obigen Fälle der Reihe nach bezw. $4\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{2}$; 5; $4\frac{1}{3}$ Dez., was anscheinend besser ist, aber wir können nicht behaupten, daß der Vergleich ganz berechtigt ist. Die absoluten Reste (siehe § 36) der K.B.-Methoden sind weniger irreführend als die scheinbaren Reste, und die letzten Reste liefern im allgemeinen ein ziemlich gutes Kriterium für die Exaktheit, womit die Perioden bestimmt sind.

d) Genauigkeit der Resultate.

Für 3-stellige Daten hätten wir richtige Resultate und ein Verschwinden bis zur 3. Dezimalstelle erwarten können, d. h. in der Nähe von 35°, 50° Winkel richtig, bis etwa 10′. Für $\frac{|1}{3|}$ Daten ist die K.B.-Methode weit weniger, die anderen beiden etwas weniger tauglich. Für $\frac{|2}{3|}$ Daten dagegen sind die Resultate besser als zu erwarten war. Für $\overline{6|}$ Daten können wir einen Fehler von 1—3 Einheiten in der 5. Stelle annehmen, und eine Genauigkeit der Winkel bis auf 10″ erwarten. Die Bemerkungen über $\overline{3|}$ Daten gelten auch hier und für die beiden letzten Methoden sind die Resultate sogar noch günstiger.

e) $\underline{5|1}$, d. h. 5gliedrige Summationsdaten.

Die Resultate zeigen keinen Vorteil beim Gebrauch von $\underline{5|1}$ Daten in diesem Beispiele.

f) Wie weit soll man die Berechnungen ausdehnen?

Unsere mit $\overline{3|3}$ resp. $\overline{3|4}$ Daten ausgeführten Berechnungen erlauben keine absolut sicheren Schlüsse. Der Augenschein deutet auf 4 Stellen, obgleich Fälle auftreten, wo es besser wäre, die vierte Stelle wegzulassen. Die Theorie läßt erkennen (siehe § 30), daß mit $\overline{3|}$ Daten beträchtliche Fehler in den 4ten Dezimalstellen nach einmaliger Division zu erwarten sind und unsere Beispiele deuten auf einen Fehler in der dritten Stelle nach der ersten Division hin. Für das spätere praktische Arbeiten mit den $\overline{3|}$ Daten entschloß ich mich, die Berechnungen bis zur vierten Dezimalstelle auszuführen, denn es schien ein Vorteil darin zu liegen, ein einheitliches System durchzuführen, auch wenn die letzte oder die letzten zwei Stellen keinen Sinn haben.

g) Überlegenheit der Resultate mit $\underline{|2}$ Daten.

Wohl die auffallendste Tatsache in den Beispielen ist die ausgesprochene Überlegenheit der $\underline{|2}$ Resultate. In den K.B.-Methoden ist d_2 verhältnismäßig größer für $\underline{|2}$ als für $\underline{|1}$ Daten, deswegen der relative Fehler geringer, was natürlich für das Rechnen günstig ist. Z. B. erhalten wir für die $\overline{3|}$ Daten Berechnungen:

	S_a	S_b	S_c	S_d
Für $\underline{|1}$ Daten. $d_2 =$	$+ .1483^{+8}$;	$+ .1129^{-17}$;	$+ .0512^{-6}$;	$+ .7380^{-62}$
Für $\underline{|2}$ „ $d_2 =$	$+1.5337^{-50}$;	$- .1936^{+12}$;	$+6.9866^{-140}$;	2.0047^{-114}.

Daß dies nicht zufällig von der Lage von T_0 herkommt, bestätigte sich bei Wiederholung der Rechnung für ein anderes $T_0 = -1.24$.

Dieselben Erscheinungen — kleine 2. Divisoren — treten auf in den Eliminationen mittels der beiden letzten Methoden bei $\underline{|1}$ Daten. Man merkt besonders, wie günstig es für die Differenz-Methode ist, daß die sukzessiven Differenzen mit $\underline{|2}$ Daten zunehmen (siehe §§ 12, 27), weil die Zahlenverhältnisse $\left|-\left(2 \sin \frac{2\beta_x}{2}\right)^2\right|$ nun beide > 1 sind. Dies bedeutet im allgemeinen auch einen geringeren relativen Fehler.

Dies betont die absolute Notwendigkeit, die Daten wohl verteilt über der Kurve zu wählen, um günstige Differenzen zu be-

kommen und eine Annäherung an eine periodische Kurve geringerer Ordnung zu vermeiden. Schlechte Resultate mit Punkten, die auf der Kurve zu nah zusammen liegen, deuten an, daß wir nicht erwarten können, eine lange Periode aus einer beschränkten Zahl von Daten zu berechnen.

Für graphische Lösungen unserer Systeme von R.S.-Gleichungen bedeutet dies wahrscheinlich den Unterschied zwischen spitz- und stumpfwinkligen Durchschneidungen.

Ein Versuch mit $\frac{|3}{3|}$ Daten mittels der R.S.-Methode führte auf $\beta_1 = 50^0 02$, $\beta_2 = 35^0 02'$, woraus man folgern kann, daß es sogar noch günstiger ist, $|\overline{3}$ Daten zu verwenden.

h) Relativer Arbeitsaufwand und Fehlerquellen bei der Untersuchung einer P_2-Funktion.

		K.B-Methoden.	Eliminationsmethoden
In Bezug auf Arbeit	Berechnung ohne Kontrolle	4 Divisionen; 2 Mult.	5 Divisionen
	Für jedes Kontrollglied extra	2 „ 2 „	3 „
I. B. a. Fehlerauftritt	Notwendige Operationen, um die Skalakoeff. zu bestimmen	2 „ 1 „ 3 Add.-Subtraktionen	2 „ 1 Subtraktion.

Diese Überlegungen zeigen den Vorzug der Eliminationsmethoden in dieser Hinsicht.

§ 38.

Zusammenfassung unserer Erfahrungen.

Die K.B.-Methoden scheinen etwas weniger mühselig zu sein zur Untersuchung von Daten auf Periodizität hin. Eine Betrachtung der absoluten Reste gibt eine gute Idee von dem Grade des Verschwindens, aber es kommt so oft vor, daß kleine Zahlen in die Rechnung eingehen, welche das Verschwinden illusorisch und die Resultate sehr falsch machen. Dieser böse Umstand tritt auf, selbst nachdem man sich bemüht hat, die Daten sorgfältig einzurichten und man kann nichts tun, ihn zu verhindern. Im Falle durchaus unbekannter Daten hat man keine Idee davon, wie viel Schaden er anrichten kann. Beim Eliminationsprozeß kann man sich einigermaßen vor diesem Übel schützen durch spezielle Kombinationen der Gleichungen bei der Subtraktion oder durch Benutzung einer Kolonne mit großen und gleichmäßigen Zahlen als Teiler.

Ein weiterer Vorzug der Eliminationsmethode besteht darin, daß die überflüssigen Kontrollgleichungen, welche in die Rechnung hineingebracht werden, schließlich benutzt werden können, um einen besseren Durchschnittswert bei der Lösung des linearen Systems für die Skalakoeffizienten zu erzielen. Kontrollglieder, welche in den K.B.-Methoden vorkommen, nützen bei der Bestimmung der Skala nichts.

Eine Schwäche der K.B.-Methode ist, daß bei der Bestimmung einer P_n sehr viel von den ersten $2n$ Termen der S_j-Reihen abhängt und darin vorhandene Fehler verhängnisvolle und unvermeidliche Folgen haben können. Die zur Berechnung der Skalakoeffizienten notwendige Arbeit ist ungefähr die gleiche, nachdem die Periodizität bestimmt worden ist, vielleicht etwas geringer bei der K. B.-Methode. Die Bestimmung der Perioden ist am umständlichsten bei der Diff.-Methode, wenn man nicht vorzieht, die Wurzeln ξ in die z-Form, $z = \xi + 2$, zu bringen. Die bei der Aufstellung des Lineargleichungssystems für die R.S.-Methode nötige Arbeit ist etwas größer als die zur Bildung von S_j-Reihen für die K. B.-Methoden erforderliche und viel größer als die zur Aufstellung des Systems für die Diff.-Methode notwendige. Die Berechnung der Differenzen fällt bei den anderen Methoden ganz weg. Der Vorteil, daß große Zahlen auftreten, wenn die Differenzen wachsen, kann irreführen, besonders wenn die ersten Zahlen klein sind.

Die Differenzmethode scheint keine Vorzüge vor den anderen Methoden zu besitzen, welche die Berechnungen der Differenzen aufwiegen könnten. Daher möchten wir im allgemeinen die direkte R.S.-Methode vorziehen. In der Praxis werden wir sie jedoch nicht ausschließlich benützen. Man kann behaupten, daß unsere Vergleiche nicht fair gegen die K.B.-Methoden waren, weil wir mehr Gleichungen als notwendig in den Beispielen zur Eliminationsmethode brauchten und folglich bessere Resultate erzielten. Dennoch war es nötig, diese Gleichungen zu berücksichtigen, um die gewünschte Kontrolle für das Verschwinden zu erhalten.

§ 39.

Verschiedene Bemerkungen zu den Untersuchungen mit P_2-Daten.

Wir können nur die Resultate gewisser anderer Untersuchungen über exakte P_2-Daten andeuten ohne Einzelheiten darüber zu geben.

(a) Der Quotient der Differenzen $\frac{\Delta_x^n}{\Delta_x^{n-2}}$ (vgl. § 27).

In Bezug auf die Grenzwerte der Quotienten $\frac{\Delta_{10}^n}{\Delta_{10}^{n-2}}$ erhalten wir für unsere P_2 § 31:

n	$\frac{\|1}{6\|}$ Daten	$\frac{\|1}{6\|}$	$\frac{\|1}{3\|}$	$\frac{\|1}{3\|}$	$\frac{\|2}{6\|}$	$\frac{\|2}{6\|}$	$\frac{\|2}{3\|}$	$\frac{\|2}{3\|}$
9	−0.75		−0.55		−2.53		−2.53	
10		−0.83		−3.80	⋮	−3.08	⋮	−3.09
11	−0.73		−0.49		.	.	.	.
12	.	−0.70		−6.84	.	.	.	.
Entsprechende Winkel,	.	.			.	.	.	.
	.	.			.	.	.	.
$-\left[2\sin\frac{\beta}{2}\right]^2$	25°13′	24°46′	nicht gut		52°40′	nicht gut	52°40′	nicht gut
Wahrer Wert		−.7144				−2.3473		
Wahrer Winkel			25°				50°	

Man bemerkt verschiedene Widersprüche. Der praktische Wert der Methode, welche zum Abschätzen der Perioden empfohlen wurde, scheint recht fraglich zu sein. Auch spielen die Amplituden der Periodizitäten der $\frac{\Delta^n}{\Delta^{n-2}}$ eine bedeutende Rolle die in der Theorie vernachlässigt wurde.

(b) Weitere Illustrationen der Willkürlichkeit von Resultaten, die unter ungünstigen Umständen erhalten werden.

Einige mittels der K. B.-Methode ausgeführte Versuche mit P_2 $\frac{1|1}{3|}$ Daten, wobei die β die Werte 15° und 30° hatten, führten zu Resultaten wie 19°½; 38°½; Exponentialfunktionen; 35°½; 56°½. Dagegen wurden mit der R.S.-Methode 17°50′, 27°45′ für die Winkel erhalten. Es traten also hier dieselben ungünstigen Verhältnisse wie bei unserem Beispiel im §§ 32 ff. auf.

(c) Ausscheiden einer bekannten Periode (vgl. § 26).

Fall (5) unserer P_2 Untersuchungen gab uns Winkel von 48°39′ und 35°42′. Wir eliminieren die 48°39′ Periode durch Multiplikation der Daten mit $1 - 2\cos 48°\,39'\,x + x^2$ und vernachlässigen die beiden ersten Terme. Die Durchschnittslösung aller P_1-Gleichungen dieser neuen Daten ergibt $p_1 = -1.6229$; $\beta = 35°46'$, in guter Übereinstimmung mit dem 2ten Winkel.

(d) Verbesserung der Periodenwinkel mit Hilfe der Phasenmethode.

Wir untersuchen die Möglichkeit der Aufbesserung der Winkel durch die Phasenmethode (vgl. § 25) und wählen aus unseren P_2-Arbeiten einen außerordentlich ungünstigen und einen günstigen Fall zur Probe. In beiden Fällen benutzen wir die Daten

$$T_0' = T_2 \text{ und } T_0'' = T_{18}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{2} B_\varkappa \sin b_\varkappa \cos m\,\beta_\varkappa = \frac{T_m + T_{-m}}{2} = \begin{cases} +3.30 \text{ und } -3.07 . (m=1) \\ +\ .93 \quad\ -\ .14 . (m=2) \end{cases}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{2} B_\varkappa \cos b_\varkappa \sin m\,\beta_\varkappa = \frac{T_m - T_{-m}}{2} = \begin{cases} -4.35 \text{ und } +1.55 . (m=1) \\ -6.38 \quad\ +2.94 . (m=2) \end{cases}$$

Die Gleichungen (vgl. § 21) werden gelöst und aus den $b'_\varkappa$, $b''_\varkappa$ erhalten wir ein verbessertes β mittels $b'_\varkappa + 16\,B_\varkappa = b''_\varkappa + 720°$. Diese neuen β können abermals zur Aufbesserung verwendet werden. Die Resultate zeigt die folgende Tabelle:

	Ungünstiger Fall $\beta_1 = 42°39'$			$\beta_2 = 38°20'$		
	b_1' / b_1''	B_1' / B_1''	β_1	b_2' / b_2''	B_2' / B_2''	β_2
Wahre Werte	160° / 240°	/ 3.	50°	140° / −20°	/ 5.	35°
Erste Verbesserung	177°27' / 216°31'	6.70 / 9.55	47°26'	85°29' / +7°23'	3.94 / 11.00	40°07'
zweite „	200°35' / 208°13'	2.37 / 4.92	45°29'	130°05' / −14°54'	6.60 / 7.62	35°56'
dritte „	163°54' / 234°39'	4.55 / 4.75	49°25'	125°14' / −4°13'	3.65 / 6.02	36°55'
	Günstiger Fall $\beta_1 = 48°39'$			$\beta_2 = 35°42'$		
Wahre Werte			wie oben			
Erste Verbesserung	162°33' / 236°01'	3.17 / 3.32	49°36'	137°22' / −16°56'	4.86 / 5.28	35°21'
zweite „	160°59' / 238°17'	2.97 / 3.07	49°50'	139°25' / −19°20'	5.02 / 5.09	35°01'
dritte „	160°11' / 240°24'	3.03 / 3.02	50°01'	139°43' / −19°46'	4.97 / 4.98	35°02'

§ 40.

Kann aus 3-ziffrigen Daten eine P_4-Funktion bestimmt werden?

Um diese Frage zu beantworten, wurden Werte einer P_4-Funktion berechnet

$$P_4 = T_m = 5 \sin(70° + m\,35°) + 3 \sin(60° + m\,50°) + 5 \sin(30° + m\,120°) + 2 \sin(m\,170°)$$

(siehe Fig. 4).

Werte $T_0 + 9.80$ $T_4 - 4.24$ $T_8 - 4.88$ $T_{12} + 2.00$
$T_1 + 10.50$ $T_5 - 10.30$ $T_9 + 8.11$ $T_{13} + 4.81$
$T_2 - 1.44$ $T_6 - 4.16$ $T_{10} + 3.83$ $T_{14} - 6.07$
$T_3 + 2.44$ $T_7 + 3.14$ $T_{11} - .96$ $T_{15} + 2\,40$

Nach Bildung aller möglichen R.S.-Gleichungen schritt die Elimination glatt voran, bis 3 Kolonnen fortgeschafft waren, worauf folgendes verblieb:

$1\ p_1 - .0438$
$1\ ,, - .0466 - .3908$
$1\ ,, - .0467 - .3909 - .6411$
$1\ ,, - .0467 - .3909 - .6410 - 1.1110$

In Anbetracht der früheren Erfahrungen scheint die Übereinstimmung in allen Kolonnen auffallend gut zu sein. Die Durchschnittslösung führt zur z-Gleichung:

$$z^4 + .0460 z^3 - 4.6071 z^2 + .4960 z + 4.1488 = 0$$

[die wahre ist $z^4 + .0456 z^3 - 4.6072 z^2 + .4952 z + 4.1504 = 0$]
Die entsprechenden β sind $\beta = 35^\circ02'$; $49^\circ49'$; $120^\circ00'$; $170^\circ02'$.

Für die K. B.-Methode wurde eine S_b-Folge gebildet und bei stets günstigen Verhältnissen die Divisionen ausgeführt. Die Reste bleiben zwischen geeigneten Grenzen und der letzte war 0.0027; absoluter Rest .043. Der schließliche Nenner der erzeugenden Funktion ist $1 + .0482y - 4.6035y^2 + .4863y^3 + 4.1387y^4$. Daraus erhalten wir $\beta = 34^\circ59'$; $50^\circ08'$; $120^\circ00'$; $170^\circ02'$.

Um zu sehen, ob unter diesen Umständen ein kleiner Winkel bestimmt werden könnte, ersetzten wir 5 sin $(70^\circ + m\ 35^\circ)$ durch 2 sin $(20^\circ + m\ 3^\circ)$ in dieser Funktion, worauf die Werte erhalten werden (siehe Fig. 5):

m = 0 + 5.78 4 — .68 8 — 2.63 12 — 0.17 16 + 5.60
1 + 6.45 5 — 4.62 9 + 7.46 13 + 5.23 17 — 3.28
2 — 3.78 6 + 2.00 10 + 1.04 14 — 2.59
3 + 2.97 7 + 7 99 11 — 4.34 15 + 8.31

Nach Aufstellung des entsprechenden P_4-Systems war es nötig, in der Elimination vorsichtiger zu sein, um günstige Verbindungen zu erzielen. Es ergab sich schließlich $p_1 = -\{.3129, .3128, .3125\}$

$\beta = 3^\circ10'$; $50^\circ00'$; $120^\circ00'$; $170^\circ02'$.

Für die K. B.-Methode wurde wieder ein S_b ausgewertet; die Verhältnisse blieben günstig, die Reste waren nie irreführend und der letzte war — .0052; absoluter Rest — .03. Die Ergebnisse sind

$\beta = 4^\circ10'$; $50^\circ00'$; $120^\circ00'$; $170^\circ00'$.

Die Ergebnisse dieser beiden Fälle sind gewiß überraschend. Wie zu erwarten war, wurde der kleine Winkel, dessen Differenzen

für sukzessive Terme klein (die Amplitude ist auch klein) sind, nicht genau bestimmt. Wir sehen, daß es durchaus möglich ist, eine P_4 mit 3-ziffrigen Daten zu erhalten, wenn die Bedingungen wie hier günstig sind, wo sehr verschiedene Periodenwinkel mit großen Amplituden die nachfolgenden Terme weit über die Kurve verteilen.

Um einen Überblick über die Reste zu bekommen, welche die zuletzt erhaltenen R. S.-Werte ergeben würden, wurden die Daten mit der Skala durchmultipliziert und es zeigten sich die Reste gleich $+.02, -.01, +.02, -.01, 00, -.02 + .02 + .00 + .00, -.01$.

§ 41.

Wirkung der Addition unperiodischer Daten zu periodischen.

Angenommen, es werde zu einer Folge rein periodischer Daten eine nichtperiodische Folge addiert; wodurch eine neue nichtperiodische Folge entsteht. Natürlich wird es unserer Methode nicht möglich sein, dieses neue System in seine Komponenten zu zerlegen, denn sobald wir zugeben, daß unsere Daten unbekannte periodische und unperiodische Elemente enthalten, müssen wir auch die Vieldeutigkeit der Lösung eingestehen. Jede beliebige periodische Funktion kann angenommen und der Rest als zugehörige nicht periodische Funktion bezeichnet werden. Doch sind wir gewöhnt, die periodische Funktion, welche die besten Reste nach einem festen Maßstab gemessen ergibt, als den periodischen Teil der fraglichen Daten anzusprechen.

Wegen der Willkürlichkeit aller numerischen Berechnungen scheint es unmöglich zu sein, ein praktisch verwendbares Kriterium für das störende Element und seine Beziehung zu der in der periodischen Funktion verursachten Störung aufzustellen. Um zu sehen, ob man aus einem Zahlenbeispiel Fingerzeige bekommen könnte, wurde das folgende, nicht allzu glücklich* gewählte, Beispiel untersucht. Zu den dreistelligen Werten von $5 \sin (30^\circ + \mathrm{m}\, 120^\circ) + 2 \sin (\mathrm{m}\, 170^\circ)$ (Fig. 6a) wurden 3-stellige Werte addiert (Fig. 6b), welche nach Belieben einer Tabelle von Wurzeln entnommen waren. Der Mittelwert des periodischen Terms ist 3,36, des nicht periodischen 3,70. Eine zweite und dritte nicht periodische Folge wurde durch Addition von 1/10 (Fig. 6c) resp. 1/100 (Fig. 6d) des ursprünglichen nicht periodischen Bestandteils zu derselben periodischen Formel gebildet.

Sodann wurde ein System von R. S.-Gleichungen für jede der drei Folgen aufgestellt und die Elimination bis auf die Bestimmung

* z. B. alle nichtperiodischen Glieder wurden positiv angenommen.

einer P_3-Funktion durchgeführt. In den beiden ersten waren keine Anzeichen für Periodizität ersichtlich, aber in der dritten erhielten wir in Andeutung eines P_2 $p_1 = + \{3.35, 3.32, 3.24, 2.99\}$. Die Durchschnittslösung führte auf $z^2 + 3.2286\, z + 2.2218 = 0$ und $\beta_1 = 119^0\, 51'$, $\cos \beta_2 = -1.1170$. Die genauen Daten, d. h. Daten ohne Hinzufügung unperiodischer Bestandteile, mit der R. S.-Methode behandelt, lieferten

$p_1 = + \{ 2.96, 2.97, 2.97, 2.98 \}$, $z_2 + 2.9696\, z + 1.9683 = 0$,

$\beta_1 = 119^0\, 57'$, $\beta_2 = 170^0\, 14'$.

Es ist erstaunlich, wie gut die Werte von p_1 übereinstimmen, dennoch sind sie, die z-Gleichung und die Winkel, sehr weit von deren richtigen Werten entfernt; wieder ein Fingerzeig, in der Anwendung unserer Methoden vorsichtig zu sein. Die Addition dieses unperiodischen Elementes (mit einer Amplitude von etwa ½% des periodischen Bestandteiles, da alle Vorzeichen positiv genommen wurden) zerstörte zwar nicht die Anzeichen für eine Periodizität, aber verdunkelte die wahren Perioden.

§ 42.

Verhalten der Hauptperioden in Annäherungen an beste Funktionen.

Es wäre interessant und nützlich zu wissen, wie stark vorherrschende periodische Elemente, d. h. Elemente mit großen Amplituden, in einer periodischen Folge die Anwendung unserer Methoden beeinflussen und besonders festzustellen, welche Tendenz sie haben, bei der Annäherung an beste Funktionen (siehe § 24) von einer geringeren Anzahl Perioden, zum Vorschein zu kommen. Hier wieder scheint es unmöglich, ein praktisches Kriterium aufzufinden, welches sich den Eigenarten der numerischen Berechnungen anpaßt. Ich gebe die Resultate eines bestimmten Falles wieder.

Zu der aus 12 Termen

bestehenden zyklischen Folge S′: 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −2, −1

wird die zyklische Folge mit

8 Termen addiert S″: 0, 1, 2, 1, 0, −1, −2, −1.

Dann entsteht eine periodische Folge S: 0, 1, 3, 5, 3, 1, usw. mit 24 Termen in jedem Zyklus und mit denselben Periodenwinkeln nämlich S′: 30°, 90°, 150°; S″: 45°, 135°. Es wurden dann andere Folgen S_n aus Summen von je 2, 3 . . . . . 13 sukzessiven Termen gebildet, worin die vorherrschende Periode von Zeit zu Zeit wechselt, die Perioden von S_n aber in S′ und S″ enthalten sind (siehe Fig. 7). Dann wurden gewisse geeignete dieser Folgen ausgewählt und alle möglichen R. S.-Gleichungen für ein P_1 und P_2 gebildet und

die Systeme nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, um die besten P_1 und P_2 für die fraglichen Daten zu erhalten. Die Resultate sind:

Reihe	Wahre Amplitude der versch. Perioden.					Beste P_1-Fkt., das β.	Beste P_2-Fkt., die β_1, β_2	
	30°	90°	150°	45°	135°		expo-trig. Fkt.	
S′	+2.49	−0.33	+0.18	0	0	32°38′	$e^{\alpha}=1.78\beta=80°08'$	
S″	0	0	0	−1.71	+0.29	41°49′	45°	135°
S	+2.49	−.33	+.18	−1.71	+.29	38°13′	34°48′	116°02′
S_4	−8.32	0	+.16	+4.46	−.32	34°04′	29°57′	102°03′
S_6	−9.61	−.47	−.18	−3.16	−.22	32°04′	31°19′	90°59′
S_8	−8.32	0	+.16	0	0	30°07′	30°	150°
S_{12}	0	0	0	+4.46	−.32	45°34′	45°	135°
S_{11}	−2.49	+.33	−.18	+4.12	+.12	41°59′	40°35′	90°19′

Um eine gleichförmige Behandlung zu sichern, wurde die Methode der kleinsten Quadrate verwandt. Die Folgen S′ und S″ wurden deshalb gewählt, weil sie genau und einfach sind; S_4 wurde untersucht, weil S″ hier mit seiner größten Amplitude hervortritt, ebenso S_6 in Bezug auf S′; S_8 weil S″ und S_{12} weil S′ fortfiel; S_{11} weil es den Übergang von vorwiegenden 30° zu 45° bezeichnet. Bewerten wir jeden Bestandteil der Glieder einer Folge nach der Größe seiner Amplitude, so können wir folgende Bemerkungen machen, wovon jede zuweilen eine Ausnahme macht, deren einige jedoch durch besondere Umstände erklärt werden können.

Erste Näherungen, beste P_1: Eine Annäherung an den ersten vorherrschenden Winkel ist unverkennbar und je ausgesprochener er ist, um so besser ist die Annäherung.

Zweite Näherungen, beste P_2: Im allgemeinen kommt der Hauptwinkel bei der zweiten Näherung noch besser zum Vorschein. Es ist verwunderlich, daß der zweite Hauptwinkel sich nicht erkennbar macht. Dies Beispiel bestärkt die Erwartung, Aufschluß über vorherrschende Periode durch Auffindung des besten P_1 zu erhalten, und einen noch besseren Wert durch Berechnung der besten P_2, aber dabei keinen Aufschluß über den zweiten Hauptwinkel bekommen zu können.

§ 43.

Berechnung von Phase und Amplitude.

Für exakte Daten werden keine Beispiele zur Berechnung von $B_\varkappa$ und $b_\varkappa$ gegeben. Dergleichen findet man in Beispielen zur Verbesserung von Perioden mit Hilfe der Phasen-Methode (z. B. § 39d) und in der Anwendung auf Beobachtungsdaten (Kapitel IV).

§ 44.

Zusammenfassung.

Unsere Erfahrungen mit bekannten Daten haben uns einen Einblick in das Verhalten und die Anwendbarkeit unserer Methoden der rekurrenten Reihen gegeben. Wir müssen uns, wollen wir auf Erfolg hoffen, hüten, sie selbst bei den exaktesten Daten blindlings oder mechanisch anzuwenden. Wir sollten uns völlig bewußt werden, wie außerordentlich empfindlich dieser analytische Apparat ist, wie willkürlich sein Verhalten zuweilen ist und wie die Resultate illusorisch werden können.

§ 45.

Berechnungsmethoden.

Lagrange gibt eine passende Form für die logarithmische Berechnung mittels seiner K. B.-Methoden. Logarithmen habe ich auch anfangs gebraucht. Die gewöhnlichen Rechenschieber gewähren nicht die für die meisten Fälle erforderliche Genauigkeit. Für rohe Überschläge und letzte Auswertungen mit trigonometrischen Funktionen, wo keine Gefahr von Übertragung von Fehlern besteht, sind sie viel benutzt worden.

Die große Maße der Rechnungen, welche den Resultaten zugrunde liegen, die hier nur erwähnt sind, wäre ohne eine Rechenmaschine unmöglich gewesen. Da mir eine 20-stellige Trinks-Brunsviga-Maschine zur Verfügung stand, war es möglich, sie den wiederholten Operationen mit demselben Multiplikator oder Divisor besonders anzupassen, welche in allen Proben bezüglich Periodizität so oft auftraten, in der Lösung von Gleichungssystemen, dem Aufsuchen von Wurzeln der Skalagleichungen und der Auswertung mit Hilfe rekurrenter Reihen. Meine Erfahrung war, daß die Rechenmaschine sowohl den Tafeln als dem Rechenschieber überlegen ist in Bezug auf Schnelligkeit, Genauigkeit, Zuverlässigkeit der Resultate, Unabhängigkeit von der Anzahl der zu berücksichtigenden Ziffern, und schließlich in Bezug auf geistigen und körperlichen Arbeitsaufwand.

Bei durchweg 3-stelligen Daten arbeitet man wahrscheinlich schneller mit Tafeln, wie die von Crelle, mit ausgesprochenem Nachteil hingegen benutzt man sie, wenn die Daten mehrziffrig sind.

Eine Kontrollkolonne — die Summe der entsprechenden Zeilen der Rechnungskolonnen — wurde gewöhnlich dort mitgeführt, wo es keine andere Kontrolle gab. Die Kontrolle stimmte meist bis auf eine Einheit in der letzten Stelle. Das Vertrauen zum Resultat, welches diese Kontrolle gab, belohnte die aufgewendete Mühe.

Viertes Kapitel.

Erproben der Methoden bei Verwendung von beobachteten Daten. Aufsuchen versteckter Periodizitäten.

Abschnitt A.

§ 46.

Wir gehen nun von vollständig bekannten genau berechneten Daten zu wirklich beobachteten nur angenähert bekannten Daten über. Das erste einfache Beispiel bezieht sich auf eine Erscheinung, deren Gesetz theoretisch bestimmt ist. Die Daten eignen sich für eine einleitende Untersuchung der Fähigkeit unserer Methoden, versteckte Perioden ausfindig zu machen.

§ 47.

Die Schwingungen eines gedämpften d'Arsonvalgalvanometers.

Die nachstehende Tabelle gibt für jede Sekunde die Ordinaten an, welche den Ausschlägen entsprechen, die einer photographischen Aufnahme[35]) der Schwingungen eines gedämpften d'Arsonvalgalvanometers entnommen wurden (siehe Fig. 8). Der Abstand des Spiegels von der drehenden Trommel war 110 cm; der Widerstand betrug 20000 Ω. Das Licht wurde sekundenweise unterbrochen, sodaß in der Kurve Lücken auftraten, welche den einzelnen Sekunden entsprechen. Wegen der Unbestimmtheit der Lücken und der Breite der Kurve können einige der aus der Aufnahme genommenen Ordinaten, wohl um 1 mm zu groß oder zu klein sein. Wahrscheinlich war auch die Drehung der Trommel nicht ganz gleichförmig.

---

[35]) Herr Professor Dr. Karl Fischer hatte die Freundlichkeit, mir die von ihm gemachten Aufnahmen zur Verfügung zu stellen.

Daten

Gedämpfte Schwingungen.

Ordinaten cm	$\overline{5}$ Daten	Werte der Funktion F_1 (89)	Ordinaten cm	$\overline{5}$ Daten	Werte der Funktion F_1 (89)
−11 + 4.24		+ 4.22	6 − 1.14	− 4.47	− 1.04
10 + 1.63		+ 1.57	7 + .10	− .17	+ .23
9 − 1.20	− 2.88	− 1.32	8 + 1.20	+ 3.74	+ 1.31
8 − 3.35	− 10.81	− 3.52	9 + 1.80?	+ 6.03	+ 1.87
7 − 4.20?	− 14.42	− 4.38	10 + 1.78?	+ 6.18	+ 1.78
6 − 3.69	− 13.00	− 3.82	11 + 1.15	+ 4.32	+ 1.16
5 − 1.98	− 7.53	− 2.11	12 + .25	+ 1.24	+ .23
4 + .22	− .14	+ .09	13 − .66	− 2.00	− .67
3 + 2.12	+ 6.75	+ 2.04	14 − 1.28	− 4.35	− 1.28
2 + 3.19	+ 10.96	+ 3.18	15 − 1.46	− 5.20	− 1.44
− 1 + 3.20	+ 11.42	+ 3.20	16 − 1.20	− 4.43	− 1.13
0 + 2.23	+ 8.33	+ 2.23	17 − .60	− 2.39	− .49
+ 1 + .68	+ 3.05	+ .66	18 + .11	+ .17?	+ .24
2 − .97	− 2.65	− .97	19 + .76	+ 2.37	+ .81
3 − 2.09	− 7.01	− 2.14	20 + 1.10?		+ 1.08
4 − 2.50?	− 8.83	− 2.52	21 + 1.00?		
5 − 2.13	− 7.76	− 2.08			

§ 48.

Versuch mit der allgemeinen Skalamethode.

Aus dem Verlauf der Kurve ist eine Periode von ungefähr 11 Sekunden zu erkennen. Um die Daten absolut größer zu machen und die Fehler derselben zu verteilen, bilden wir zunächst $\overline{5}$ Daten. Da man wegen der Form der Kurve erwarten kann, daß keine rein trigonometrische Periode vorhanden ist, so hat es keinen Vorteil, die R. S.-Methode anzuwenden. Um eine allgemeine Skala zu ermitteln, stellen wir daher ein aus $\overline{5|1}$ Daten gebildetes R_n-System von 6 Gleichungen auf. Auch wollen wir das ursprüngliche System angeben, um dem Gang der Elimination einige Schritte zu folgen.

Das R_n-System. Vgl. Daten § 47.

− 14.42 r_2	− 13.00 r_1	− 7.53 . .
− 13.00	− 7.53	− .14 . .
+ 6.75	+ 10.96	+ 11.42
+ 11.42	+ 8.33	+ 3.05
− 8.83	− 7.76	− 4.47
+ 3.74	+ 6.03	+ 6.18
+ 6.18	+ 4.32	+ 1.24

(88) Nach der ersten Division.

		Nach Elimination von r_2.
1 r_2 + .9015 r_1	+ .5222	1 r_1 + 1.5868 . . .
1 + .5792	+ .0108	1 + 1.6094
1 + 1.6237	+ 1.6919	1 + 1.5932
1 + .7294	+ .2671	1 + 1.6004
1 + .8788	+ .5062	1 + 1.5626
1 + 1.6123	+ 1.6524	1 + 1.5896
1 + .6990	+ .2006	

Bereits nach der zweiten Division ist die Übereinstimmung der r_1 derart, daß man nach den Erfahrungen die man mit genauen Daten gemacht hat, annehmen kann, es liegt eine rekurrente Reihe der zweiten Ordnung vor. Aus einer Durchschnittslösung ergibt sich die allgemeine Skala:

$$.9027\ T_m - 1.5903\ T_{m+1} + T_{m+2} = 0.$$

Aus der Skalagleichung $x^2 - 1.5903\ x + .9027 = 0$, deren Wurzeln konjugiert sind, bekommen wir dann: $(x - e^{\alpha + \beta i})(x - e^{\alpha - \beta i}) = 0$; also: $e^{2\alpha} = .9027$, $e^{\alpha} = .9501$, $\alpha = -.0510$, $2\ e^{\alpha} \cos \beta = 1.5903$, $\cos \beta = .8369$, $\beta = 33^0 10'$, d. h. eine Periode von 10.85 Sekunden.

Um die Amplitude und die Phase zu bestimmen, suchen wir unter den 1|1 Daten eine passende Stelle, wo die Ordinaten ziemlich groß und scheinbar genau bestimmt sind. Wir nehmen:

$$T_{-1} = +3.20,\ T_0 = +2.23,\ T_1 = +0.68.$$

Setzen wir die Werte für T_0 und T_1 in die Funktion $Be^{-.0510\ m} \sin(b + m\ 33^0 10')$ ein, so bekommen wir nach Auflösung der 2 Gleichungen

(89) $$F_1 = 3.10\ e^{-.0510\ m} \sin(134^0 + m\ 33^0 10').$$

(Siehe Datentabelle und Fig. 9.)

Wenn man die vorhin erwähnte Unbestimmtheit der Daten in Betracht zieht, scheinen die Resultate zu befriedigen.

Da ein beträchtlicher Teil der Daten schon in die Berechnungen mithereingezogen wurde, scheint es kaum der Mühe wert zu sein, mittels der Phasen (vgl. § 25) eine Verbesserung des β und α zu unternehmen. Berechnen wir aber wie oben die zu $T_0 = -1{,}20$ entsprechende Phase, so bekommen wir $b'' = 300^0 15'$. Infolgedessen ist

$$134^0 + 16\beta = 300^0 15' + 360^0, \text{ d. h. } \beta = 32^0 53'$$

und die Periode gleich 10.95 Sekunden. Das entsprechende B für die Stelle $T_0 = 2.23$ ist 3.15, worin man $e^{\alpha} = .950$ annimmt. Dagegen ist $e^{\alpha} = .951$, wenn man $B = 3{,}10$ annimmt. Bei einer Wiederholung des Verfahrens ändern sich die β und α nur wenig. Wir bekommen nämlich:

(90) $$\beta = 32^0 54',\ b = 134^0 02',\ e^{\alpha} = .951,\ B = 3.10.$$

Eine Auswertung dieser Funktion $F_2 = 3.10\ (.951)^m \sin(134^0 02' + m\ 32^0 54')$ in dem Intervall T_0 (2.23) bis T_{16}, für welche diese Funktion berechnet wurde, zeigt, daß F_2 etwas besser als F_1 mit den Daten übereinstimmt. Für die Strecke T_{-11} bis T_0 und auch für das ganze Datensystem ist aber die Annäherung von F_1 besser als von F_2.

Es ist möglich, daß man noch bessere Werte bekommen könnte, wenn man ein T'_0 annehmen würde, das dem Anfang der Daten näher kommt. Vermutlich würde das entsprechende β zwischen den zwei angegebenen liegen. Es kann sein, daß sich die Periode im Laufe der Zeit verlängert. Im R.-System (88) ist hauptsächlich die erste Hälfte der Daten zur Verwendung gekommen. Zwecks späterer Vergleichung nehmen wir die Funktion F_1 an, obwohl es natürlich zweifelhaft ist, ob sie die möglichst beste Annäherung darstellt.

§ 49.

Bestimmung der Phase und Amplitude bei Verwendung von $\frac{5|1}{}$ Daten.

Man würde enttäuscht werden, wollte man vielleicht unter Benützung von $\frac{5|1}{}$ Daten die Formeln des § 22 zu diesem Zwecke auswerten. Nehmen wir z. B. zunächst an

$$n = 5 \qquad \beta = 33^\circ 10' \qquad \alpha = -.0510.$$

Dann ergibt sich aus (77): $M = +3.484$ und $N = -0.243$. Wir untersuchen die folgenden Fälle. (Immer ist $T_0 = 2.23$).

a) $m = 6 \qquad \mathfrak{T}_{-6} = -13.00 \qquad \mathfrak{T}_6 = -4.47$

mit Benutzung der Formel (79). Hier verwenden wir verhältnismäßig weitabstehende Teile der Daten.

b) $m = 2 \quad \mathfrak{T}_{-2} = 10.96 \quad \mathfrak{T}_0 = 8.33 \quad \mathfrak{T}_2 = -2.65,$

auch mit (79), wobei Daten in der Nähe von T_0 verwendet werden mit der Absicht, auf dieser Strecke eine Übereinstimmung der Kurven zu erzwingen.

c) Dieselben Daten wie bei b), aber mit Verwendung der ersten Gleichung von (79), (nämlich derjenigen für $\frac{\mathfrak{T}_{-2} + \mathfrak{T}_2}{2}$) und dann auch mit Verwendung von (78), um die zweite nötige Gleichung zu erhalten. Dabei wurde beabsichtigt, eine möglichst gute Übereinstimmung in der Nähe von T_0 zu erzielen. Die Resultate sind:

	b	B
a)	148°40′	3.92
b)	133°	3.19
c)	139°30′	3.40.

Das zweite (b) unterscheidet sich nur wenig von den für $\frac{1|1}{}$ Daten erhaltenen b und B. Dagegen sind (a) und (c) entschieden nicht zufriedenstellend. Wertet man z. B. (c) in der Nähe von T_0 aus, so bekommt man große Reste in Bezug auf nicht nur die T sondern auch auf die $\mathfrak{T}$. Nur wo die Art der Rechnung eine Übereinstimmung erzwingt, ist dieselbe vorhanden, und zwar dort mit der zu erwartenden Genauigkeit. Die folgende Tabelle gibt die Resultate wieder.

$\frac{5}{1}$ Terme $\mathfrak{T}$.			Erzwungene Übereinstimmung.	
Berechnete Werte (c).	Daten.		Berechnete Werte.	Daten.
+ 12.28	+ 10.96			
+ 12.18	+ 11.42	$\mathfrak{T}_0 =$	+ 8.32	+ 8.33
+ 8.32	+ 8.33	$\frac{\mathfrak{T}_{-2} + \mathfrak{T}_2}{2}$	= + 4.14	+ 4.155
+ 2.21	+ 3.05			
— 4.00	— 2.65			

Weitere ausgeführte Rechnungen führten auf die gleichen Schlüsse, gaben nebenbei eine rechnerische Probe für die Richtigkeit der umständlichen Formeln (77) (78) (79) und zeigten auch, wie sehr sich bei der Bildung von $\frac{5}{1}$ Daten die Fehler häufen können. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß die angenommenen Werte von β und α soweit von den richtigen abstehen, daß sie an dem schlechten Ergebnisse, (a) (c), schuld sind. Man ist zu der Behauptung berechtigt, daß der Vorteil, den man um die Phasen und Amplituden zu bestimmen, bei der Benutzung von Datensummen und der umständlichen Formeln (77) (79) zu haben glaubt, zweifelhaft ist. Dagegen scheint es empfehlenswert zu sein, eine günstige Stelle auf der Kurve der Daten zu wählen, um dort eine Übereinstimmung unter Verwendung der ursprünglichen Daten zu erzwingen.

§ 50.

Untersuchung der Daten vermittelst der R.S.-Methode.

Offenbar sollten die Daten gedämpfter Schwingungen auch eine reziproke Skala aufweisen und zwar eine Skala mit p_2 und p_1 und eine z-Gleichung mit konjugiert komplexen Wurzeln. Bei Versuchen mit der R.S.-Methode stellt sich aber heraus, daß die Elimination nicht so günstig vor sich geht, wie bei der Ag.S.-Methode. Das kommt scheinbar daher, daß der Dämpfungsfaktor die aufeinanderfolgenden Daten ziemlich wenig beeinflußt; infolgedessen existiert für die $\frac{5}{q}$ Daten, wo q klein ist, eine gute Näherungsfunktion der Form $B \sin(b + m\beta)$. Eine solche Funktion läßt sich mittels einer reziproken Skala mit nur einem p bestimmen. Deshalb eignen sich die R.S.-Gleichungen nach der ersten Elimination nicht zu weiteren günstigen Eliminationen. Beispielsweise ergaben aus einem Versuch mit $\frac{1}{2}$ Daten nachdem p_2 eliminiert wurde, die Werte $p_1 = -\{1.72, 1.37, 1.30, 1.69, 1.94\}$ und weitere Elimination zeigte keine Wahrscheinlichkeit dafür, daß es sich um P_n-Daten, $n > 2$, handelt. Merkwürdig ist es, daß die aus einer Durchschnittslösung entstehenden p_2 und p_1 mit dem

F_1 (89) entsprechenden Werten nahe übereinstimmen. Wir bekommen:

$p_1 = -1.605$ im Vergleich mit $p_1 = \frac{r_1 + r_1 r_2}{r_2} = -1.614$

$p_2 = -2.653$ „ „ „ $p_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 1}{r_2} = +2.686$

Ein aus $\frac{5}{2}$ Daten gebildetes P-System, das dem R-System (88) in § 48 ziemlich analog ist, wies nach Elimination von p_2 auf:

$$p_1 = -\{1.24, 1.46, 1.78, 1.72, 1.89, 1.53, 1.17\}.$$

Hier sind die Durchschnittswerte wiederum ziemlich gut, nämlich: $\beta = 33^0\frac{1}{2}$, $e^\alpha = .95$.

Um zu untersuchen, ob die nichtbefriedigenden Übereinstimmungen für p_1 eine Folge der Datenfehler sind, verwendeten wir die aus F_1 berechneten Werte, um ein zu dem letzten erwähnten P_2-System entsprechendes P_2-System zu bilden. Aus diesem System ergab sich: $p_1 = -\{1.62, 1.63, 1.66, 1.69, 1.67, 1.58, 1.60\}$; $\beta = 33^0 10'$, $e^\alpha = .945$, also eine befriedigende Übereinstimmung nicht nur bezüglich des p_1 sondern auch des β und des α, zumal einige der berechneten Werte F_1 um ,01 bis ,02 falsch sein könnten. Vergleichung der zwei P-Gleichungssysteme, nämlich des aus den beobachteten und des aus dem F_1-Werte gebildeten, zeigt, daß sich bei der Bildung der R.S.-Gleichungen die scheinbar kleinen Fehler ganz beträchtlich häufen. Wir schließen daraus, daß die schlechten Erfahrungen mit der R.S.-Methode darauf zurückzuführen sind, daß die Fehler der ursprünglichen Daten die in diesem Falle besonders empfindlichen Eliminationen ungünstig beeinflussen.

§ 51.

Hat es einen Vorteil $\frac{5}{1}$ Daten zu benützen?

Bildet man aus $\frac{1}{1}$ Daten ein R_2-System, das dem aus $\frac{5}{1}$ Daten gebildeten R_2-System (88) möglichst genau entsprechen soll, so erhält man daraus:

$$r_1 = -\{1.55, 1.62, 1.61, 1.57, 1.59, 1.57\},$$
$$e^\alpha = .946 \quad , \quad \beta = 33^0\ 10'.$$

Die Übereinstimmungen der aus den zwei Berechnungen gewonnenen β bzw. α ist gut und die Übereinstimmung der r_1 bei den $\frac{1}{1}$ Daten ist fast so gut wie bei der Verwendung der $\frac{5}{1}$ Daten. Setzt man übrigens die Werte r_1 und r_2 in deren entsprechende R_2-Systeme ein, so findet man, daß die Reste des $\frac{1}{1}$ Systems in jeder Hinsicht günstiger als diejenigen des $\frac{5}{1}$ Systems sind. Der Vorteil bei Verwendung von $\frac{5}{1}$ Daten ist also fraglich.

§ 52.

Anwendung der allgemeinen K.B.-Methode auf die Daten der gedämpften Schwingung.

Wie es bei den Skalamethoden keinen Vorteil hat, eine reziproke Skala zu benutzen, so ist es bei den K.B.-Methoden nicht von Vorteil, die S_j-Reihen zu verwenden. Ein mittels der allgemeinen K.B.-Methode für $\frac{1}{1}$ Daten ausgeführter Versuch, wobei T_0 gleich — 4,20 angenommen wurde, ergab nach zwei vollständigen Divisionen die absoluten Reste $(-\ 4.20)\ (+\ .3005)\ [-\ .0087\,x^2 - .0748\,x^3 - .1107\,x^4\ldots]$ und weiter $\beta = 34^0 45'$, $e^\alpha = .945$.

Aus einem ähnlichen Versuch mit $\frac{1}{3}$ Daten ($T_0 = -3{,}35$) ergaben sich die Reste $(-\ 3.35)\ (+\ 1.3015)\ [-.0467\,x^2 + .0125\,x^3 + .0378\,x^4 + .0204\,x^5\ldots]$ und die Werte $\beta = 32^0 45'$ $e^\alpha = .961$.

Die letzten Resultate sind in Bezug auf β die besten. Dagegen sind die ersten bezüglich der absoluten Reste und des Dämpfungsfaktors den zweiten überlegen.

§ 53.

Zusammenfassung.

Die an diesem Beispiel gemachten Erfahrungen zeigen, daß unsere Methoden wohl anwendungsfähig sind. Dabei ist immerhin zu betonen, wie empfindlich die Methoden sind und wie störend ziemlich kleine Fehler wirken. Nur durch vernünftige Auswahl der Daten und zweckmäßige Bildung der Gleichungssysteme und Elimination kann man erwarten, befriedigende Erfolge zu erzielen. Jedoch scheint der Vorteil bei der Verwendung von Datensummen zur Bestimmung der Perioden, Phasen und Amplituden ganz zweifelhaft zu sein. Die Vorteile der Skalamethoden gegenüber den K.B.-Methoden, nämlich Durchschnittslösungen benutzen zu können, während bei den K.B.-Methoden die ersten Glieder der S-Reihen einen unverhältnismäßig großen Einfluß auf die Resultate ausüben, scheinen ganz beträchtlich zu sein.

Abschnitt B.

Untersuchungen meteorologischer Daten.

§ 54.

Eisfreie Zeit an russischen Strömen.

Wir betrachten nunmehr einige Untersuchungen, die mit meteorologischen Daten ausgeführt wurden. Diese von Prof. Brückner gesammelten Daten befinden sich in den Geographischen

Abhandlungen[36]). Aus den vielen Tabellen keineswegs verheißungsvollen Materials wurden für die Untersuchung die scheinbar günstigsten Fälle ausgewählt.

Die in der Tabelle auf Seite 82 in der letzten Kolonne ausgeführten Daten für die Schwankungen der eisfreien Zeit an russischen Strömen in Abweichungen (Tagen) von vieljährigen Mitteln ausgedrückt, sind in der untenstehenden Tabelle wiedergegeben (siehe Fig. 10).

Mittel für	Daten	$\underline{5}$ Summen	Mittel für	Daten	$\underline{5}$ Summen	Mittel für	Daten	$\underline{5}$ Summen
1706—10	+10.6		1756—60	− 6.5	+10.4	1806—10	−6.2	−19.6
1711—15	+ 2.0			+7.8	+21.8		−7.4	−12.1
	− 3.6	+29.2		+8.1	+ 7.0		−1.9	− 3.3
	+ 9.2	+20.4		+1.4	+13.9		+7.7	− .5
	+11.0	+ 7.7		−3.8	+ 3.4		+4.5	+ 5.0
	+ 1.8	+ .1		+0.4	− 6.8		−3.4	+ 3.0
	−10.7	−19.1		−2.7	− 8.0		−1.9	− 2.7
	−11.2	−19.1		−2.1	− 8.5		− 3.9	− 6.1
	−10.0	−27.4		+0.2	−15.1		+2.0	− 3.8
1751—55	+11.0	− 8.9	1801—05	−4.3	−19.8	1856—60	+1.1	− 2.6
							−1.1	+ 4.8
							− 0.7	+ 2.6
							+3.5	+ 9.4
							−0.2	
						1876—80	+7.9	

Die Daten wurden in verschiedenen geeigneten Zusammensetzungen untersucht; aber in keinem Fall ist das Vorhandensein einer Periodizität auch nur wahrscheinlich geworden, geschweige denn, daß eine solche nachgewiesen werden konnte.

Ein Beispiel für die Behandlungsweise nebst den Ergebnissen soll noch folgen. Es wurden zunächst die $\underline{2}$, $\underline{3}$ . . . bis $\underline{7}$ Daten gebildet und die entsprechenden Kurven gezeichnet. Aus der Form derselben konnte geschlossen werden, daß wahrscheinlich $\underline{5}$ Daten für die Untersuchung sich am besten eignen würden. Deshalb wurde aus diesen $\underline{5}\,\underline{1}$ Daten eine mit $T_0 = -19{,}6$ (1806—10) anfangende K. B. S_a-Reihe gebildet, wobei die am besten bestimmten Daten zur Verwendung kamen:

$$S_a = -39.4 - 27.2x - 11.8x^2 - 8.5x^3 - 1.8x^4 + 6.4x^5 + 11.2x^6 + 0.9x^7 + 18.0x^8 + 7.8x^9 + \ldots$$

[36]) Band IV, Heft 2: Prof. Dr. Ed. Brückner: Klimaschwankungen seit 1700 nebst Bemerkungen über die Klimaschwankungen der Diluvialzeit etc. Wien und Olmütz 1890.

Bei der Durchführung der Rechnungen erhielten wir die absoluten Reste:

$d_1R_1 = +5.2x^2 + 15.8x^3 - 0.8x^4 - 0.9x^5 + 1.4x^6 + 11.6x^7 - 27.7x^8 + 21.7x^9$
$d_1d_2R_2 = \quad + 33.8 \quad -15.5 \quad -2.6 \quad -8.2 \quad +51.9 \quad -98.0$
$d_1d_2d_3R_3 = \quad + 17.6 \quad +26.7 \quad -11.4 \quad +1.2$
$d_1d_2d_3d_4R_4 = \quad + 45.0 \quad -54.8$

Das wahrscheinlichste Verschwinden findet vielleicht nach der ersten Division statt (vgl. die Reste). Der Winkel der entsprechenden P_1-Funktion ist $\beta = 32^0\frac{1}{3}$, was also einer Periode von 56 Jahren entspricht. Vergleicht man die Kurve dieser P_1-Funktion mit der Kurve der $\frac{5}{1}$ Daten, so sieht man einige wenige auffallende Übereinstimmungen, welche doch schließlich für reine Zufälle gehalten werden müssen.

Versuche, die mit Hilfe von $\frac{1}{1}$ Daten nach der R.S.-Methode bis auf 5 Eliminationen ausgeführt wurden, zeigten keine Spuren einer etwa vorhandenen Periodizität. Ein Versuch mit $\frac{1}{1}$ Daten nach der Ag.S.-Methode ausgeführt, gab zur Vermutung Anlaß, daß eine P_2-Funktion den Daten genügen könnte. Aber eine Auswertung dieser P_2 nämlich — $9.70\ (.888)^m \sin(42^0\ 50' + m\,68^0 30')$ + $1.37\ (1.155)^m \sin(12^0 30' + m\,132^0)$ zeigte, daß eine Übereinstimmung mit den Datenkurven nur insoweit vorhanden ist, als sie durch die Art der Koeffizientbestimmung erzwungen wurde. (Die Kurve der $\frac{5}{}$ Daten läßt es doch vermuten, daß es sich um eine Funktion der Form $Be^{m\alpha} \sin(b + m\beta)$ handelt. (Siehe Figur 10.))

Unsere Arbeit konnte keine Spur einer periodischen Eigenschaft dieser Erscheinung entdecken. Man könnte einwenden, daß die Wahl der Daten nicht günstig genug war, um lange Perioden zum Vorschein zu bringen. Aber ein Versuch mit $\frac{1}{2}$ Daten, d. h. 10-jährigen Intervallen führte auch auf nichts. Man braucht offenbar eine noch längere Reihe von Daten, um etwas über lange Perioden feststellen zu können.

§ 55.

Wasserstand des Bodensees.

Auf pag. 119 gibt Brückner[37])

„Jahresmittel des Wasserstandes des Bodensees
nach den Beobachtungen zu Konstanz"

und zwar vom Jahre 1821 an bis 1880. Folgende Tabelle gibt die Abweichungen vom 60-jährigen Mittel und das 5-jährige Mittel derselben, in cm ausgedrückt, wieder (siehe Fig. 11a):

[37]) Siehe F.N. 36.

Daten	5 m	Daten	5 m	Daten	5 m
1821 7 cm		1841 5 cm	—2.8	1861 —14 cm	— 7
—26		—27	1.4	—17	— 5
3	0	18	2.2	— 7	—16
15	— 6	18	4.8	—10	—14.4
1	3.2	— 3	6.6	—32	— 5
—22	3.4	18	0.0	— 6	— 2
19	0	—18	—4.	30	2
4	— 1.8	—15	1.4	16	4.8
— 2	6.6	— 2	2.6	2	5.6
1830 — 8	— 5.8	24	8.2	—18	2.2
20	— 8.0	24	13.2	— 2	.6
—43	—10.8	10	9.4	13	— 1.4
— 7	—12.8	10	10.2	8	5.4
—16	—14.6	—21	2.4	— 8	12.6
—18	— 7	28	— 7.2	16	16
9	— 7	—15	—16.0	34	22.8
— 3	— 4.4	—38	—15.8	30	28.6
— 7	— 2.2	—34	—16.8	42	28.0
— 3	— 3	—20	—16.6	21	
1840 — 7	— 7.8	+23	—12.4	1880 13	

Die hier eingeschlagene Rechnungsweise war folgende: Aus den $\frac{5}{1}$ Daten wurde zunächst ein P_n-System mit den Zentren 1850, 1, 2, 3, 4, 5 gebildet, worauf die 1te, 2te, 4te, 5te Kolonne der Reihe nach eliminiert wurden. Obgleich diese Elimination unter günstigen Verhältnissen geschah, hat sich keine Spur einer Periodizität gezeigt, die eine weitere Verfolgung verdient hätte.

§ 56.

Ein Versuch, die beste P_3-Funktion (vgl. § 24) zu finden, wurde in folgender Weise ausgeführt: Zunächst wurden aus den $\frac{1}{1}$ Daten die 54 möglichen Gleichungen der Form $k + T_3 p_3 + (T_2 + T_4) p_2 + (T_1 + T_5) p_1 + (T_0 + T_6) = 0$ gebildet. Dabei ist k gleich $c(2 + 2p_1 + 2p_2 + p_3)$, also eine Konstante, die auf jedes T denselben Einfluß ausüben kann und fähig ist, das angenommene Mittel zu verbessern, m. a. W. die Achse in die günstigste Lage zu verschieben. Aus diesen 54 Gleichungen wurde ein Normalsystem von 4 Gleichungen gewonnen und zwar dadurch, daß jede der ersten vier Kolonnen der Reihe nach positiv gemacht und die erhaltenen Gleichungen zu einander addiert wurden.

Das Normalsystem ist:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
-48p_3 & -96p_2 & -137p_1 & +54k & -110 & =0 \\
-86 & +108 & +1183 & +4 & +242 & =0 \\
+144 & +1138 & -25 & -2 & +294 & =0 \\
+838 & +262 & +81 & -6 & +160 & =0
\end{array}
$$

Aus der Auflösung desselben ergaben sich

$p_1 = -.1916$

$p_2 = -.2498 \quad k = +1.0296$, d. h. $c = 1.-$

$p_3 = -.0869$

Die z-Gleichung, nämlich: $z^3 - .1916z^2 - 3.2498z + .2963 = 0$ besitzt die Wurzeln $z = 2\cos\beta = +1.8563, +.0909, -1.7556$. Daraus folgt $\beta = 21°50'$ (16.5 Jahre), $87°14'$ (4.1 J.), $151°23'$ (2.4 J.).

Um einen Einblick in die Zuverlässigkeit dieser Resultate zu bekommen, wurde eine Auswertung vorgenommen, aber nicht durch vorherige Bestimmung der Phasen und Amplituden, sondern mittels der Skala, nämlich $T_0 - .1916\,(T_1 + T_5) - .2498\,(T_2 + T_4) - .0869\,T_3 = -T_6$.

Als Grundlage für die Berechnungen der anderen Glieder wurden die ersten sechs Daten nämlich die Jahre 1821 bis 1826, den ersten $T_0, T_1, T_2 \ldots T_5$ entsprechend gewählt. Dieses Verfahren kommt darauf hinaus, die Bestimmung der B und b sofort auf die 6 Daten 1821—26 zu gründen. Fig. 11a, gestrichelt, gibt die Ergebnisse dieser Auswertung. Unterhalb der $\frac{1}{1}$ Datenkurven befinden sich die Kurven (Fig. 11b) der Mittel aus den $\frac{5}{1}$ Daten.

Zu diesen Kurven läßt sich folgendes bemerken:

Die zwei kurzen, 2½- und 4-jährigen Perioden, haben die Bildung einer Kurve bewirkt, die bezüglich ihrer Zickzackform ein gewisses ähnliches Aussehen mit der Datenkurve besitzt. Eine merkliche Übereinstimmung in dem Ausschlag der Ordinaten ist nicht zu verkennen. Es besteht keineswegs eine Phasenübereinstimmung, und die bei den ersten 6 Gliedern erzwungene Übereinstimmung hört sofort auf. Etliche Übereinstimmungen von Maxima und Minima sind wahrscheinlich nur zufällig. Die Wirkung der 16½-jährigen Periode ist in der Kurve kaum zu erkennen. In der $\frac{5m}{1}$ Daten-Kurve tritt indessen die Wirkung dieser Periode stärker auf; die 4-jährige Periode ist jedoch immer noch am stärksten ausgeprägt. Die Kurve der $\frac{5m}{}$ Daten zeigt Spuren einer langjährigen Periodizität, jedoch einer längeren als einer 16-jährigen Periode. Die Übereinstimmung in den Phasen um 1860 ist nicht anhaltend.

Zu beobachten ist, daß die ganze Bestimmung der Amplituden und der Phasen auf den ersten 6 Daten beruht und daß diese geeignet sind, die kurzen Perioden stark hervortreten zu lassen. Bei einer anderen Wahl der 6 Glieder könnte die Kurve ganz anders aussehen. Man könnte z. B. auch glauben, daß 6 aus den 5^m Daten vernünftig ausgewählte Glieder eine bessere Übereinstimmung der langen Periode und vielleicht auch eine größere Ähnlichkeit der zwei Kurven im ganzen hervorbringen könnten.

Es scheint wahrscheinlich zu sein, daß eine lange Schwankung in den Daten vorhanden ist, und daß dieselbe nebst der stark ausgeprägten zickzackartigen Form der Datenkurve die Ergebnisse unserer Berechnungen beeinflußt hat.

§ 57.

Zusammenfassung.

Unsere Untersuchungen dieser zwei meteorologischen Erscheinungen sind weder vollkommen noch einwandfrei, namentlich in Bezug auf das Aufsuchen von langen Perioden. Dagegen scheint es sicher festgestellt zu sein, daß keine der beiden Erscheinungen so periodisch ist, daß sie sich einigermaßen genau mittels einer P_1-, P_2- oder P_3-Funktion ausdrücken ließe. Sonst hätten die Rechnungen diese Periodizität klargelegt.

Es scheint nicht lohnend zu sein, die Untersuchung dieser Daten weiterzuführen. Erstens ist ihre Periodizität unwahrscheinlich und zweitens sind sie für unsere empfindliche Methode zu roh und ungenau. Man untersucht solche Daten besser mittels der graphischen oder sozusagen mechanischen Methode, welche die Meteorologen anzuwenden pflegen.

Abschnitt C.

Die tägliche Variation der magnetischen Nadel.

§ 58.

Seit langer Zeit hat man eine im Laufe der Zeit schwankende tägliche Variation der magnetischen Nadel erkannt. Eine Betrachtung einer Reihe von Daten, die sich auf das Jahresmittel dieser Schwankung bezieht, gab Grund zu glauben, daß diese Erscheinung einen für die Untersuchung nach unseren Methoden geeigneten Gegenstand bilden würde. Die nötigen Daten wurden folgenden Quellen entnommen:

Für Berlin: a) Encke, Math. Abh. d. K. Akad. zu Berlin 1857,
b) Hermann Fritz, Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandische Maatschappig der Wetenschappen te Harlem, 1878—1887, p. 11.

Für Greenwich, Mailand, Prag und Christiania die Tabellen der gesammelten (Band LXXXVI, p. 207) Beobachtungen, sowie die jährlichen Berichte, die sich in den Astronomischen Mitteilungen befinden. Diese Daten wurden durch Vergleich mit den ursprünglichen Tabellen von Prof. Wolfer nachgeprüft und die Greenwicher Daten mittels der Greenwicher Veröffentlichungen ergänzt. Die benützten Daten stehen in der an Seite 94 gegebenen Tabelle. Die verschiedenen graphischen Darstellungen befinden sich in Tafel 1.

§ 59.

Berlin und Greenwich.

Wir gehen auf die bezüglich der Berliner und Greenwicher Daten ziemlich eingehenden Untersuchungen nicht ein, sondern beschränken uns auf die Wiedergabe der Hauptergebnisse. Die Versuche mit Berliner Daten lassen zunächst eine überwiegende, scheinbar periodische Schwankung mit einem Periodenwinkel zwischen 30^0 und 33^0, also einer Periode von ungefähr 11 Jahren vermuten. Ein zweites $\beta \sim 90^0$ schien einigermaßen beständig aufzutreten. Jedoch ließ sich keine bestimmte Periode sicherstellen. Mangels einer hinlänglichen Reihe von Daten waren die Untersuchungen der Berliner Daten nicht geeignet, langjährige Perioden sichtbar zu machen. Für Greenwich standen uns für die Jahre 1841 bis 1909 Daten zur Verfügung. Die 11-jährige überwiegende Schwankung läßt sich in den Rechnungen erkennen, doch mit weniger Bestimmtheit als im Falle Berlin. Von den verschiedenen Periodizitäten, die hie und da vorhanden zu sein schienen, konnte man nichts bestimmtes behaupten.

§ 60.

Christiania.

In den Daten der Jahresmittel der täglichen Variation der Magnetnadel läßt sich bei allen Stationen eine Schwankung von ungefähr 11 Jahren leicht beobachten. Infolgedessen ist es, um große Zahlen zu bekommen, zweckmäßig, die 5-jährigen Summen bzw. Mittel aus den Daten zu bilden. Vergleicht man die Kurve der 5-jährigen Mittel für Christiania mit der von Greenwich, so ist eine gewisse Ähnlichkeit unschwer zu beobachten. Die Christiania

Kurve schien etwas regelmäßiger und bezüglich des 70-jährigen Mittels, nämlich 6.63, symmetrischer gestaltet zu sein (siehe Tafel 1).

Mit den Daten von Christiania wurde eine große Anzahl verschiedenartiger Untersuchungen ausgeführt. Die Mehrzahl von diesen soll hier besprochen werden, nicht weil die Ergebnisse an und für sich einen Wert haben, sondern weil sie Beispiele sind für die Art der Anwendung und für das Verhalten unserer Methoden zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten.

§ 61.

Einleitender Versuch.

Ein einleitender Versuch mit $\frac{5m|1}{}$ Daten (Fig. I (g)) nach der R.S.-Methode, wobei die zwei Hälften derselben mittels einer Subtraktion, nämlich 1876—1875, 1877—1874 usw., vereinigt wurden, wies zwar auf den 11-jährigen Einfluß hin, aber der für eine P_1-Funktion berechnete Wert $\beta = 28^\circ 40'$ ist offenbar zu klein. Eine Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden der Determinanten nach der vierten Elimination führte auf eine P_4-Funktion mit den Werten für $\beta = 32^\circ 10'$, $19^\circ 40'$, 84° und $158^\circ 50'$. Ähnliche mit $\frac{3m|1}{}$ Daten ausgeführte Versuche, die den 11-jährigen Einfluß nicht so stark wie die mit $\frac{5m|1}{}$ Daten vorgenommenen betonen sollten, ergaben für eine P_1-Funktion $\beta = 32^\circ 50'$ und für eine P_4 $\beta = 36^\circ 50'$, $26^\circ 50'$, 60°, $169^\circ 10'$, aber in keinem Falle war eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für eine Periodizität zu erkennen. Man bemerkt keine große Ähnlichkeit zwischen den zwei Systemen von Ergebnissen. In dem ersten System kann man vielleicht eine 11- und eine 20-jährige Periode erkennen. Wegen der kleinen Datenzahlen waren die Umstände für die Berechnung nicht günstig.

§ 62.

Versuche, den 11-jährigen Einfluß zu vergrößern und zu bestimmen.

Mit der Absicht, den 11-jährigen Einfluß stark hervorzuheben, um ihn möglicherweise dadurch genau bestimmen zu können, wurde so verfahren: Aus den $\frac{5|1}{}$ Daten wurden zunächst Abschnitte von je 11 Gliedern gebildet und dieselben hierauf zueinander addiert, damit die Maxima soweit wie möglich zusammenfallen sollten. Aus diesen Daten wurde ein P_4-System gebildet. Nach der ersten Division erhielt man für eine P_1-Funktion die Werte

$p_1 = -\{1.64,\ 1.60,\ 1.73,\ 1.84,\ 1.68,\ 1.74,\ 1.61,\ 1.82,\ 1.79\}$,

also eine ziemlich gute Übereinstimmung, aber mit einem nicht verkennbaren Gang der Zahlen. Man sieht, daß nach der ersten

Division in der zweiten Kolonne dieses P_4-Systems die obigen p_1 stehen, in der dritten Kolonne die zu $\frac{5}{2}$ Daten entsprechenden p_1, d. h. $2\cos 2\beta$, in der vierten die Werte für $2\cos 3\beta$ usw. bis zu $2\cos 5\beta$. Ein derartiges Gruppieren wurde dreimal a) b) c) vorgenommen, damit die Wirkung einer Verschiebung der Lage der Maxima beobachtet werden konnte. Blieb das β praktisch unverändert, so konnte man annehmen, daß ungefähr der richtige Wert dieses Haupteinflusses bestimmt wurde. Die dadurch erhaltenen aus resp. β, 2β, 3β, 4β, 5β berechneten β-Werte sind:

Aus	β	2β	3β	4β	5β	(6)
(a)	30°45′	32°22′	31°22′	28°51′	28°05′	32°22′
	31°37′	32°43′	31°48′	31°07′	28°05′	
(b)	28°24′	26°34′	26°27′	27°56′	26°36′	28°54′
	27°44′	28°28′	28°44′	27°56′	26°36′	
(c)	30°05′	33°19′	33°57′	25°48′	24°24′	31°29′

Unter (a) und (b) befinden sich in den zweiten Zeilen Werte, die unter Vernachlässigung einiger offenbar schädlicher Fälle erhalten wurden. (a) und (b) sind entstanden aus der Summe von 6, und (c) aus der Summe von 5 Abschnitten von je 11 Gliedern. Unter (6) stehen die Resultate, die man erhält, wenn man, ohne eine Division auszuführen, β aus $2\cos\beta = -\frac{\sum(T_{m+1} + T_{m-1})}{\sum T_m}$ berechnet.

Aus einer Betrachtung der Werte kann man etwa schließen: Unser Versuch, den 11-jährigen Einfluß derart überwiegend zu machen, daß wir imstande wären, die Existenz desselben und einen genügend genauen Wert für denselben behaupten zu können, ist nicht gelungen. Wegen der Nichtübereinstimmung der Werte ist man zu glauben gezwungen, daß ein ganz erheblicher Rest, sei er periodisch oder nichtperiodisch, den richtigen Wert der 11-jährigen Periode, wenn eine solche Periode überhaupt existiert, verwischt. Man hätte den Wert ebensogut aus dem Verlauf der Kurve schätzen können.

§ 63.

Versuch, andere Perioden als eine 11-jährige zu finden.

Wir berichten nunmehr über Versuche, die gemacht wurden, um den 11-jährigen Einfluß zu vernichten, damit andere etwa vorhandene Perioden deutlicher zum Vorschein kommen könnten. Man bildete zunächst die $\frac{11}{1}$ Daten (Fig. II) und setzte dann durch Subtraktion die erste und die zweite Hälfte der Daten zusammen.

Damit wurde beabsichtigt, eine größere Anzahl der Daten in die Rechnungen eingehen zu lassen und auch größere Zahlen zu bekommen. Aus einem aus diesen Daten gebildeten P_4-System ergab sich keine bestimmte Spur einer Periodizität. Am wahrscheinlichsten war eine P_1-Funktion. Der entsprechende Wert für $\cos\beta$ ist etwas größer als 1, was vielleicht auf einen langjährigen Einfluß hinweist.

§ 64.

Nun wurde eine Untersuchung von $\frac{11}{6}$ Daten vorgenommen, wobei ein P_4-System derart gebildet wurde, daß als Zentren der 6 aufgestellten Gleichungen nicht $\frac{\ }{6}$ Daten, sondern die den aufeinanderfolgenden Jahren 1870—75 entsprechenden Daten gewählt wurden. Obgleich bei Benutzung eines derartigen Systems der größte Teil der Daten in die Rechnungen einbezogen ist, stellt dies vielleicht nicht eine günstige Art dar, vorzugehen, um langjährige Perioden herauszubringen. Bezüglich der Eliminationen würde ein aus $\frac{11}{1}$ Daten gebildetes System fast ebenso günstig sein. Während der Elimination dieses Systems stellte es sich heraus, daß als zweckmäßigste Reihenfolge der zu eliminierenden Kolonnen resp. p_4, konstans, p_1 zu nehmen sei, wonach

$$p_3 = \{.3051, .3328, .5015\}\, p_2$$

erhalten wurden. Aus einer Durchschnittslösung ergab sich die Skala: $T_0 + .4824\,(T_1 + T_7) + 1.6573\,(T_2 + T_6) + .6294\,(T_3 + T_5) - .8632\,T_4 \equiv -T_8$. Mit Verwendung dieser Skala und 7 angenommenen Termen wurden andere Terme ausgewertet wie folgt:

	(1)	Daten	(2)		(1)	Daten	(2)
1894	— 0.42	—0.76		1911			+ 5.29
1899		—7.05	— 7.71	1912	+18.87		
1900	—12.97	—7.67		1917			+22.75
1905		—7.47	—16.69	1918	+15.21		
1906	—13.41			1923			—15.96
				1924	—41.56		

(1) Berechnungen, die sich auf die ersten 7 Glieder der $\frac{11}{6}$ Daten stützen. (2) Berechnungen, die sich auf die 7 mit 3.60 (1851) anfangenden Glieder stützen.

Die Übereinstimmung ist nicht befriedigend, überdies ist es nicht wahrscheinlich, daß sich die Erscheinung auch in der Zukunft so verhalten wird. Bildung und Elimination von noch weiteren P_4-Gleichungen bestärkte die Vermutung, daß die Er-

gebnisse illusorisch seien. Immerhin wurde die entsprechende z-Gleichung, nämlich

$$z^4 + .4824\,z^3 - 2.3427\,z^2 - .8178\,z - 2.1778 = 0$$

aufgelöst, wobei erhalten wurde:

$$2\cos\beta = 1.6737,\ -1.8519,\ -.1521 \pm .8243i$$

und daraus

$$\begin{matrix} 6\beta_1 = 33^\circ 12' \\ 6\beta_2 = 157^\circ 48 \end{matrix}\Bigg| \begin{matrix} 6\beta_3 = 94^\circ 05' \\ e^{6\alpha} = 1.4951,\ e^{-6\alpha} = .6688,\ 6\alpha = .4022. \end{matrix}$$

Um die 8 Konstanten zu bestimmen, wurden 8 Terme, nämlich T_{-24} (1847) bis T_{+24} (1895) benützt, und 8 Gleichungen vom Typus (69), (70), (71) aufgestellt:

$$\begin{matrix} B_1 \sin b_1 \\ B_1 \cos b_1 \end{matrix}\Bigg\{ \begin{matrix} \cos m\beta_1 \\ \sin m\beta_1 \end{matrix} + \begin{matrix} B_2 \sin b_2 \\ B_2 \cos b_2 \end{matrix}\Bigg\{ \begin{matrix} \cos m\beta_2 \\ \sin m\beta_2 \end{matrix}$$

$$+ (B_3 \sin b_3 \pm B_4 \sin b_4) \cos m\beta_3 \Bigg\{ \begin{matrix} \cosh m\alpha \\ \sinh m\alpha \end{matrix}$$

$$+ (B_3 \cos b_3 + B_4 \cos b_4) \sin m\beta_3 \Bigg\{ \begin{matrix} \sinh m\alpha \\ \cosh m\alpha \end{matrix} = \frac{T_m \pm T_{-m}}{2}$$

Die Auflösung führte schließlich auf die Funktion

$$-4.166 \sin(-49^\circ 26' + m\beta_1) - .696 \sin(-3^\circ 55' + m\beta_2) - 1.481\, e^{m\alpha} \sin(-4^\circ 47' + m\beta_3) - .831\, e^{-m\alpha} \sin(-60^\circ 10' - m\beta_3).$$

Eine gewisse Ähnlichkeit zwischen dieser Kurve (Fig. II(g)) und der Datenkurve namentlich in dem Intervall 1847—1895 ist nicht zu verkennen, aber betrachtet man den weiteren Verlauf der Kurve, so wird man überzeugt, daß sie keineswegs das Gesetz der Erscheinung darstellt. (Diese Kurve bezieht sich eigentlich auf $6\beta_3 = 85^\circ 55'$ anstatt $94^\circ 05'$. Der Unterschied bei Benutzung von $94^\circ 05'$ würde kaum bedeutend sein.)

§ 65.

Die $\frac{11\,m}{1}$ Daten wurden weiter untersucht und zwar mittels der Differenzmethode, immer in der Hoffnung, eine allem Anschein nach vorhandene langjährige Periode herauszubringen. Ein Versuch mit Δ^0 bis Δ^8 führte scheinbar auf eine P_2-Funktion mit $\beta_1 = 4^\circ 50'$, $\beta_2 = 137^\circ 52'$. Die lange Periode hat sich gezeigt, aber die zweite blieb uns unbekannt.

Benutzt man diese Daten um die beste P_1 zu bekommen, so erhält man $\beta = 6^\circ 23'$ und die Kurve dieser P_1 stimmt bedeutend besser als diejenige der P_2 mit der Datenkurve überein. Es wird immerhin über irgend eine einzige P_1 ein beträchtlicher Rest verbleiben.

Nun wurden die $\frac{11}{2}$ Daten verwendet, um die Differenzen bis zu Δ^{20} zu bilden. Aus einem dazu entsprechenden R'_4-System von 7 Gleichungen ergab sich r'_1 und die P_4-Funktion, nämlich $r'_1 = +(6.42, 7.86, 8.01\}$; $B_1 \sin(b_1 + m\,58^\circ 16') + B_2 \sin(b_2 + m\,22^\circ 42') + B_3 \sinh(b_3 + m.3758) + (-1)^m B_4 \sinh(b_4 + m.3568)$.

Diese Funktion scheint der Erscheinung ganz fremd zu sein und man bemerkt besonders, daß die lange Periode nicht vorhanden ist. Möglicherweise ist sie in das dritte Glied $\cos \beta_3 = 1.30$ übergegangen. Die Quotienten $\frac{\Delta^{x+2}}{\Delta^x}$ schienen sich zuerst dem Grenzwert ~ 2.70 zu nähern. Aber schließlich nahmen sie rasch ab. Die Reste des ursprünglichen R'_4-Systems werden, wenn man die r'_k einsetzt, scheinbar befriedigend klein. Es schien jedoch nicht der Mühe wert, eine Auswertung der Funktion zu unternehmen.

§ 66.

Versuche mit 23-jährigen Summendaten.

Aus einer Betrachtung der Kurve der $\frac{5m}{}$ Daten schien es wahrscheinlich, daß der überwiegende Einfluß eine Periode von ungefähr 11,4 Jahren hat. Deshalb durfte man vielleicht erwarten, bei der Elimination der Wirkung dieser Periode aus den Daten gleichzeitig eine vorhandene langjährige Periodizität besser mit $\frac{23}{}$ (Fig. III) als mit $\frac{11}{}$ Daten zum Vorschein zu bringen.

Wir erwähnen drei Versuche mit $\frac{23}{5}$ Daten. Zunächst erhielten wir bei der Benutzung eines P_4-Systems aus 5 Gleichungen bestehend, mit Zentren, die in die Jahre 1872—1876 fielen, keine Andeutung einer Periodizität, ausgenommen vielleicht die einer P_1. Aber der entsprechende $\cos \beta = 1.02$ deutet an, daß die langjährige Periode in eine Funktion $B \sinh(b + m.214)$ übergegangen ist. Nun wurden die $\frac{23}{1}$ Daten untersucht, um die beste P_1 zu finden. Mit dem P_1-System aus allen möglichen R.S.-Gleichungen der Form $T_m p_1 + (T_{m-1} + T_{m-1}) = 0$ ergab sich aus der:

a) Normalgleichung aus $p_1 = -\frac{\sum(T_{m-1} + T_{m+1})}{\sum T_m}$. $\beta = 6^\circ 40'$

b) „ „ $\sum(p_1 + \frac{T_{m-1} + T_{m+1}}{T_m} = 0)$. $\beta = 10^\circ 50'$

c) „ nach der Methode der kleinsten Quadrate. $\beta = 7^\circ 42'$

Es scheint, daß bei Verwendung der Methoden b) und c) die Gleichungen mit kleinen bezw. großen Koeffizienten ein zu großes Gewicht im Normalsystem erhalten. Eine Berechnung von B und b mit Hilfe der Formeln (83), wobei, um viele Daten zu verwenden, $n = 21$ genommen wurde, führte unter Benutzung, erstens von $\beta = 7^{\circ}11'$ (des Mittels von a) und b)) und zweitens von $\beta = 6^{\circ}40'$ auf keine befriedigende Kurve. Die Phase war zu klein, die Amplitude zu groß. Die Datenkurve, wenn überhaupt periodisch, hat eine längere Periode als irgend eine von a) b) c) geben würde, und eine von a) b) oder c) bestimmte Kurve könnte sich der Datenkurve nicht gut anpassen.

§ 67.

Als zweiter Versuch mit $\underline{23}|$ Daten wurde aus den zehn mit 1852 anfangenden $23|5$ Daten ein P_3-System gebildet. Die Ergebnisse der Elimination sind nicht erwähnenswert. Obgleich nach dem Aussehen der Datenkurve bestimmte Spuren einer langjährigen Periode zu erwarten wären, ist doch zu beachten, daß selbst $\underline{|5}$ Datenpunkte nicht weiter als 20° bis 30° auf der Kurve voneinander abstehen, was erfahrungsgemäß auf das Rechnen unter ungünstigen Umständen hindeutet.

Schließlich wurden dieselben $\underline{23}|5$ Daten mittels der Ag. S.-Methode untersucht und zwar mit Ausführung von 4 Eliminationen, das heißt genügend weit, um eine P_2-Funktion bestimmen zu können. Auch dieser Versuch war bezüglich der Feststellung irgend welcher positiver Resultate vergeblich.

§ 68.

Elimination einer langjährigen Periode.

Bei einem weiteren Versuch, den langjährigen Einfluß aus den Daten zu eliminieren, wurde so verfahren. Bei Verwendung von $\beta = 6^{\circ}40'$ (siehe a) § 66 oben) in $1 - 2\cos\beta\, x + x^2$ (vergl. § 26) erhält man den Multiplikator $1 - 1.9863\, x + x^2$, womit die aus den $5m\ 1$ Daten gebildete rekurrente Reihe multipliziert wurde. Fig. VI gibt eine Übersicht über die Ergebnisse. Man merkt namentlich den noch überwiegenden doch umgekehrten 11-jährigen Einfluß und auch ein sekundäres zickzackartiges Aussehen der Kurve, welches eine etwa 2—3-jährige Periode andeutet. Aus diesem Verfahren dürfen wir nichts bestimmtes schließen, da angenommen, daß eine langjährige Periodizität wirklich vorhanden ist, das benützte β ganz falsch sein könnte.

§ 69.
Zusammenfassung.

Die bisherigen Untersuchungen deuten einen elfjährigen und einen langjährigen Einfluß an. Es ist uns nicht gelungen, von jedem Zweifel freie Werte der Dauer dieser Schwankungen zu finden oder vielleicht gar einen einwandfreien Beweis dafür, daß sie wirklich periodisch sind, zu erbringen. Ob diese Mißerfolge auf andere vorhandene Periodizitäten oder auf einem beträchtlichen unperiodischen Bestandteil oder auch Rechnungstäuschungen oder darauf zurückzuführen sind, daß die Erscheinung überhaupt unperiodisch ist, läßt sich nicht sagen. Man ist zu der Überzeugung gekommen, daß die umständlichen Rechnungen nicht mehr geleistet haben, als auch eine vernünftige Betrachtung der verschiedenen Datenkurven ergeben hätte.

Diese Bemerkung gilt auch für unsere allgemeinen Untersuchungen der Christiania Daten sowie für unsere speziellen Methoden, die bezweckten, einen Einfluß hervorzuheben und denselben dadurch ziemlich genau zu bestimmen oder einen Einfluß zu vernichten, um andere herauszubringen und zu bestimmen.

§ 70.
Untersuchung der Christiania Daten bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Es ist einzuwenden, daß bezüglich der Untersuchungen allgemeinerer Art, wie etwa die einleitenden (§ 61), und auch bezüglich derartiger, welche kurze Periodizitäten bestimmen könnten, die bisherige Arbeit mit den Christiania Daten unzureichend ist. (Schon solche Versuche mit den Berliner und namentlich mit den Greenwicher Daten waren nicht glänzend geglückt.) Um möglicherweise auch kürzere Perioden zu entdecken, wurde so verfahren: aus den ursprünglichen $\frac{1.1}{}$ Daten wurden die 62 für das Intervall 1841—1910 möglichen P_4 R. S.-Gleichungen gebildet. (In den $\frac{5\,m|\,1}{}$ Daten ist die Wirkung der kurzen Perioden mehr oder weniger verwischt.) Unter die Unbekannten wurde auch k geschrieben, wo $k = (p_n + 2\,p_{n-1} \ldots + 2)\,c$ sein sollte. (Vgl. das k § 56.)

Aus diesen 62 Gleichungen wurde zunächst ein Normalsystem $(N_1\,S_1)$ nach den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate berechnet.

$$(N_1S_1)\begin{cases} 62.00\,K + 6.68\,p_4 + 12.08\,p_3 + 10.09\,p_2 + 7.67\,p_1 + 4.23 = 0 \\ 6.68 + 112.08 + 175.99 + 87.74 - 13.43 - 85.09 = 0 \\ 12.08 + 175.99 + 313.09 + 161.19 + 2.23 - 140.72 = 0 \\ 10.09 + 87.74 + 161.19 + 136.51 + 47.52 - 43.41 = 0 \\ 7.67 - 13.43 + 2.23 + 47\,52 + 86.83 + 71.80 = 0 \end{cases}$$

Dieses System $(N_1 S_1)$ hat die Eigenschaften eines P_4-Systems. Genügen die Daten wirklich einer periodischen P_n-Funktion und zwar $n = 1, 2, 3, 4$, d. h. einer Funktion mit 1, 2, 3 oder 4 Perioden, dann sollte während der Elimination der p-Kolonnen das dazu entsprechende Verschwinden eintreten. Weil kein (selbst angenähertes) Verschwinden vorgekommen ist, so schließen wir daraus, daß die Erscheinung sich mittels einer P_n-Funktion, $n = 1, 2, 3$ oder 4, nicht genau ausdrücken läßt. Betreffend die Einzelheiten der Elimination sei erwähnt: Für eine P_1 würde man erhalten $p_1 = -\{1.81, 1.57, 1.78, 1.84, -.17\}$, also keine Übereinstimmung, und nach drei Eliminationen: $p_1 = -\{1.76, 1.24, 2.37, 3.14\}$. Die 5te Gleichung ist nicht im Einklang mit den anderen des Systems. Um einen möglichen störenden Einfluß dieser 5ten Gleichung zu vermeiden, wurde eine Elimination der ersten vier Gleichungen vorgenommen und zwar auch ohne eine Spur eines Verschwindens zu erreichen.

§ 71.

Um einen Begriff von dem Vorteile bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zu bekommen, wurde nun ein zweites Normalsystem $(N_2 S_2)$ berechnet und zwar nach der in § 56 besprochenen Methode:

(1)	$+ 6.68 p_4$	$+ 12.08 p_3$	$+ 10.09 p_2$	$+ 7.67 p_1$	$+ 4.23$	$+ 62.00 k$	$= 0$
(2)	$+ 68.98$	$+ 115.16$	$+ 61.85$	$- 4.19$	$- 60.61$	$- 2.00$	$= 0$
$(N_2 S_2)$ (3)	$+ 67.92$	$+ 116.16$	$+ 59.17$	$- 6.73$	$- 69.43$	$- 0.00$	$= 0$
(4)	$+ 54.52$	$+ 97.34$	$+ 75.59$	$+ 22.81$	$- 32.93$	$+ 4.00$	$= 0$
(5)	$- 6.28$	$+ 2.52$	$+ 31.99$	$+ 58.51$	$+ 57.93$	$+ 8.00$	$= 0$

Da die Gleichungen (2) und (3) kaum voneinander unabhängig sind, so ist dieses $(N_2 S_2)$ System nachteilig empfindlich. Die Elimination deutete Nichtperiodizität an.

§ 72.

Die besten P_1, P_2, P_3, P_4 für die Christiania Daten.

Nun wurden die besten P_n gesucht und zwar folgenderweise: Unter Benutzung der ersten $n + 1$ Kolonnen der Normalsysteme (§ 71) nebst der k Kolonne ($n = 1, 2, 3, 4$) wurden vier untergeordnete Systeme gebildet. Aus den Auflösungen dieser Systeme wurden die zugehörigen p_n und k und somit schließlich die z-Gleichungen erhalten. Die Tabelle zeigt die Ergebnisse aus beiden Systemen.

	$(N_1 S_1)$ System				$(N_2 S_2)$ System			
Skalakoeffizienten								
Beste	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4
p_4				— .8139				—3.6279
p_3			+.9390	+ .6684			+ .4349	+2.2182
p_2		+.2174	—.1147	+ .4832		—2.0318	+ .3354	+ .7675
p_1	—1.5687	—.6346	—.8110	—1.2311	—1.6699	+ .6786	—1.0438	—1.8947
k	— .0258	—.0625	—.0706	— .0371	— .0149	— .0761	— .0660	— .00007
c	— .060	—.066	—.065	— .036	— .045	— .076	— .065	— .0001

$$k = c\,(p_n + 2\,p_{n-1} + \ldots\ 2)$$

Die Periodenwinkel

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4
β_1	38°20′	32°21′	28°42′	25°43′	33°23′	31°57′	29°25′	28°11′
β_2		121°50′	152°11′	159°04′		$\cos\beta =$	143°14′	$\cos\beta =$
						−1.1878		−1.0107
β_3			65°38′	91°24′			63°08′	73°52
β_4				47°43′				36°59

§ 73.

Bemerkungen zu diesen Ergebnissen.

a) Die Werte von c, die auffallend gut übereinstimmen, deuten an, daß die Achse ein wenig nach oben verschoben werden sollte.

b) Der 11-jährige Einfluß tritt immer auf aber nicht mit einem bestimmten Wert. Mit wachsenden n in P_n nimmt diese Periode zu.

c) Das $(N_2 S_2)$ System liefert stets die besten sich anschließenden Werte für diesen 11-jährigen Einfluß. Bei Anwendung der Methode der k. Q. erhalten wahrscheinlich die Gleichungen mit großen Koeffizienten ein Gewicht, das ihnen gar nicht zukommt.

d) Der zweite auftretende Winkel β_2*) scheint einen Einfluß von einer 2—3-jährigen Dauer anzudeuten. Diese Wirkung würde bei $\frac{5}{1}$ Daten fast verschwinden. Vielleicht ist sie mit der zickzackartigen Eigenschaft (§ 68) verwandt. Das Auftreten einer hyperbolischen Funktion in den $(N_2 S_2)$ Ergebnissen ($\cos\beta > 1$) ist auf die oben erwähnte Empfindlichkeit des Systems zurückzuführen. Eine kleine Änderung der Gleichung (3) übt einen großen Einfluß auf die p_n aus, weshalb man für eine P_2-Funktion $\beta_1 = 31°40'$ $\beta_2 = 150°40'$ bekommen würde.

*) Vgl. die im § 42 sich befindenden Schlüsse bezüglich des zweiten Winkels. Vgl. auch die Auswertungen §§ 74—77.

e) Man vermißt Spuren irgendwelcher langen Perioden, die sicher vorhanden sein müssen, wenn man der $\frac{5}{1}$ Datenkurve genügen will. Verwendung von $\frac{1}{1}$ Daten ist nicht günstig dafür, diese langen Perioden zu entdecken.

f) Die letzten zwei Winkel scheinen unerklärlich zu sein. Wahrscheinlich sind sie reine Zufälle und, sofern es sich um eine Periodizität handelt, ohne Bedeutung.

§ 74.

Die Phasen und Amplituden dieser besten P_n.

Die Ergebnisse unserer Versuche haben uns keineswegs das Vorhandensein irgend einer bestimmten Periodizität zu behaupten berechtigt. Man wollte doch gerne wissen, wie genau die den vorher gewonnenen Periodenwinkeln β entsprechenden Funktionen die Daten wiedergeben und welche P_n überhaupt die beste ist. Um sich weiter der Methode der k. Q. zu bedienen, kann man zwecks Bestimmung der Phasen und Amplitude so verfahren, daß man zunächst alle möglichen Gleichungen der Form (69)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} B_\varkappa \cos m\beta_\varkappa \sin b_\varkappa = \frac{T_m + T_{-m}}{2}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} B_\varkappa \sin m\beta_\varkappa \cos b_\varkappa = \frac{T_m - T_{-m}}{2}$$

bildet, und darauf die entsprechenden Normalsysteme berechnet. Dadurch bestimmt man schließlich die $B_\varkappa \sin b_\varkappa$ und $B_\varkappa \cos b_\varkappa$.

Wendet man diese Methode auf die aus dem $(N_1 S_1)$ entstehenden P_1, worin $B = 38°20'$, an, und setzt man T_0 für das Jahr 1876, so bekommt man 35 Gleichungen für $B \sin b$ und 34 für $B \cos b$. Aus diesen zwei Systemen ergibt sich $.06 + 0.258 \sin (16°10' + m\,38°20')$. (Das .06 bezieht sich auf die Konstante k.)

Die Kurve dieser Funktion und die Datenkurve haben gar keine Ähnlichkeit miteinander. Die Phase bei T_0 ist um eine halbe Periode falsch. Die Amplitude sollte etwa 6 mal so groß sein. Die Verschiedenheit der Kurven ist nicht verwunderlich. Das β ist offenbar viel zu groß. Das β der $(N_2 S_2)$ P_1-Funktion, nämlich 33°23', würde sicherlich eine bessere Übereinstimmung bewirken.

§ 75.

Verfährt man nun analog, um die besten Amplituden und Phasen für eine beste P_2-Funktion zu bekommen, so erhält man schließlich $+ .06 - 1.555 \sin (55°10' + m\,32°20') + .047 \sin (54°33'$

$+ m\ 121°50'$). Die Amplitude .047 deutet an, daß in den Daten die 3-jährige Periode eine geringe Wirkung hat. Betrachtet man die Kurve (siehe Fig. IV) dieser P_2, so sieht man, daß eine P_1-Kurve (diese ist praktisch eine P_1-Kurve) den Verlauf der Datenkurve kaum besser als diese wiedergeben könnte. Für eine P_1 ist es natürlich unmöglich die schwankenden Maxima und Minima wiederzugeben.

Der Wert der mühsamen Rechnungen, wobei diese Phasen und Amplituden gewonnen wurden, ist ganz fraglich. Bei Verwendung von nur der nötigen Anzahl von Gleichungen, um die Unbekannten zu bestimmen, erhielten wir für eine P_1 bessere B und b als die im § 74 schon erwähnten.

Analog bekommt man für eine P_2 $+ .06 - 1.581 \sin(59° + 32°20') + .283 \sin(33° + m\ 121°50')$. Dieses P_2 unterscheidet sich von der obigen P_2 hauptsächlich darin, daß B_2 6mal so groß ist als dort. Dieses stärkere Auftreten der zweiten Periode hat doch nicht besonders vorteilhaft gewirkt.

§ 76.

Um ein Beispiel einer Auswertung einer besten P_3 zu geben, erwähnen wir die Ergebnisse bei Benutzung der $\beta = 29°25'$; 141°40'; 63°05', also ungefähr der aus dem $(N_2 S_2)$ System gewonnenen Winkeln. Nur 5 der möglichen Gleichungen wurden aufgestellt und die normalen Systeme wurden wie bei dem $(N_2 S_2)$ System berechnet. Die gewonnene Funktion ist:

$$+ .06 - 1.162 \sin(28°30' + m\ 29°25') - .256 \sin(134°45' + m\ 141°40') + .551 \sin(52°15 + m\ 63°05').$$

Die Kurve (siehe Fig. V) ist nicht so gut wie die P_2-Kurve.

§ 77.

Um einen Einblick in das Verhalten der besten P_4-Funktion zu gewinnen, wurden mittels der Skala, die sich auf das $(N_1 S_1)$ System bezieht, einige Glieder berechnet. Die nämliche Skala ist $-.04 + T_0 - 1.2311 (T_1 + T_7) + .483 (T_2 + T_6) + .668 (T_3 + T_5) - .814 T_4 = - T_8$.

Die ersten 8 Daten bilden die Grundlage für die berechneten Werte. Aus der Kurve (siehe Fig. V (g)) ersieht man, daß der zu der 11-jährigen Periode entsprechende Winkel ganz falsch ist. Die P_4 und die Datenkurve haben geringe Ähnlichkeit miteinander.

§ 78.

Die Reste der ursprünglichen Gleichungen.

Ein weiteres Probieren mit den verschiedenen besten P_n geschah in der Weise, daß die betreffenden Werte p_1, p_2 usw. in

die ersten 31 der 62 (§ 70) ursprünglichen Gleichungen eingesetzt und die entsprechenden Reste berechnet wurden. Die Tafel gibt die Resultate wieder.

	$(N_1 S_1)$ System				$(N_2 S_2)$ System
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1
$\sum r$	22.24	25.66	20.29	19.61	22.34
$\sum (rr)$	22.85	32.10	18.78	21.51	23.46
$.674\sqrt{\frac{\sum (rr)}{n-\mu}}$	$\pm .60$	$\pm .72$	$\pm .56$	$\pm .61$	$\pm .61$

Dabei ist n die Anzahl der Gleichungen also = 31, μ = bezw. 2, 3, 4, 5, 2, und bedeutet die Anzahl der Unbekannten. Vergleicht man diese Ergebnisse mit denjenigen der §§ 74—77, so wird man einige Widersprüche finden. Es scheint merkwürdig zu sein, daß die Mittelfehler sich so nah kommen. Man kann natürlich einwenden, daß diese Probe bloß die Hälfte der Daten verwendet.

§ 79.

Zusammenfassung.

Es scheint sicher festgestellt zu sein, daß bei der Durchführung unserer Methoden eine Anwendung der Prinzipien der Methode der kleinsten Quadrate keineswegs immer die besten Ergebnisse liefert. Unsere Arbeit hat bei Anwendung der Methode der k. Q. und der ursprünglichen $\frac{1}{1}$ Daten keine bestimmte Periodizitäten festgestellt. Unter den 4 auftretenden Winkeln beeinflußt nur der erste die Kurven so, daß sie das Aussehen der Datenkurven einigermaßen annehmen. Diese „Periode" ist in der Kurve immer maßgebend und tritt in den Rechnungen immer mit der größten Amplitude auf. Keine Kurve scheint besser zu sein, als diejenige der P_2, welche praktisch eine P_1 ist. Daher scheint man zu dem Schluß berechtigt zu sein, daß unter Benutzung einer P_1 mit einer ungefähr 11-jährigen Periode die beste Annäherung (wenigstens bis auf eine P_4) an diese rohe $\frac{1}{1}$ Datenkurve erhalten würde. Dabei muß immer ein großer Rest, sei er periodisch oder nichtperiodisch, übrig bleiben.

Schließlich kann man sich dem Gefühle nicht verschließen, daß die ganze Untersuchungsweise voll von Täuschungen sein kann und deswegen vielleicht nicht Anspruch darauf erheben darf, daß irgend welche Schlüsse daraus gezogen werden.

Abschnitt D.

Untersuchung der zusammengefaßten Beobachtungen der drei Observatorien Christiania, Mailand, Prag.

§ 80.

Mit dem Gedanken, daß vielleicht eine Verbindung der Daten von verschiedenen Beobachtungsorten mehr Bestätigungen einer periodischen Eigenschaft geben könnten, wählte ich Christiania, Mailand und Prag als geeignet aus und berechnete die Durchschnitte der drei Datengruppen, sowie die fünfjährigen Mittel für die Jahre 1841—1910. Man erkennt eine Ähnlichkeit in allen Kurven bezüglich der Übereinstimmung der Extrema, scheinbar abwechselnde starke und schwache Maxima und Minima, ein sehr starkes Maximum um 1870 und ein ausgesprochenes Fallen der Kurve von 1885 an. Der Einfluß der 11-jährigen Periode zeigt sich stark, aber dennoch hinterläßt jede einzige Periode einen starken Rest. Die Mittelwerte für Christiania, Mailand und Prag nach Subtraktion der langjährigen Mittel, nämlich $7'.15$ für $\frac{1}{1}$ Daten und $7'.203$ für $\frac{5\,m}{1}$ Daten nennen wir die 3-Stationendaten. (Siehe Fig. VII, VIII, auch die Datentabelle S. 94.)

§ 81.

Die ersten und zweiten Differenzen der 3-Stationendaten.

Eine Betrachtung der Kurve legt den Gedanken nah, daß eine Neigung der Achse (von 1870 an abwärts, vor 1870 aufwärts) die Kurve besser zentrieren würde (symmetrischer machen würde). Dies deutet das Vorhandensein einer linearen Funktion an $(c_1 + c_2 m)$, welche durch Bildung der zweiten Differenzen eliminiert würde. In der Tat zeigen die Kurven der Δ^1- und Δ^2-Daten (Fig. XI, XI (g)) mehr Symmetrie in Bezug auf die Achse. Die Δ-Figuren haben die allgemeinen Charakteristika der $\frac{5\,m}{1}$ Kurve. Die Δ^2-Kurve ist recht wellig, was eine kürzere Periode (etwa 2 Jahre) vermuten läßt.

Die R. S.-Methode wurde zunächst auf die Δ^1 angewendet. Elimination eines P_4-Systems ergab keine sicheren Beweise vom Vorhandensein einer Periode, da gewisse Anzeichen bei genauerer Untersuchung sich als trügerisch erwiesen. Das beste P_1 gibt $\beta = 32^0 20'$, während die Reste über diese P_1 hinaus auf ein $\beta_2 = 142^0$ hindeuten. Es mag wohl eine Beziehung dieser Werte zu der zwei- bis dreijährigen Periode bestehen, welche häufig zum Vorschein kommt und zu den kurzen Wellen in der Differenzenkurve.

Die Differenzen sind nicht weiter untersucht worden, da die Verhältnisse nicht günstig zu liegen schienen. Theoretisch würden unsere Methoden auch die linearen Funktionen zum Vorschein bringen, obgleich es einfacher ist, wenn solche Komponenten schon vorher eliminiert werden.

§ 82.

Untersuchung der 1|6 3-Stationendaten nach der Differenzmethode.

Berechnet man zunächst die Differenzen bis zu Δ^{11} aus den 1|6 Daten für die Jahre 1844, 50 . . . 1910 (die nämlichen Daten sind — 1.09, + 1.98, — 1.78, + 0.54, + 0.01, + 0.46, — 0.41, — 0.60, + 0.97, — 1.14, — .78, — 2.26), so kann man dann daraus ein R'_4-System bilden, das nach einer Division wie folgt aussehen wird. (Hier fangen wir rechter Hand zu eliminieren an.)

					Die ersten Divisoren
+ .01 r'_4	— .02 r'_3	+ .0714 r'_2	— .2598 r'_1	+ 1 = 0	+ 60.24
— .00	— .00	+ .0381	— .2174	+ 1	+136.60
+ .01	— .02	+ .0654	— .2516	+ 1	—239.44
+ .01	— .02	+ .0730	— .2656	+ 1	—148.20
+ .01	— .02	+ .0741	— .2696	+ 1	— 87.96

(91) Nach einer weiteren Elimination erhalten wir:

— .25 r'_4	+ .46 r'_3	— .7854 r'_2	+ 1 r'_1	= 0
— .25	+ .46	— .7982	+ 1	
— .12	+ .20	— .5429	+ 1	
+ .10	— .20	— .2750	+ 1	
+ .08	— .19	— .2755	+ 1	

Die Übereinstimmung für eine P_1 ist recht auffallend und wenn man nur die drei ersten Gleichungen berücksichtigt, ist sie auch für eine P_2 gut. Es scheint in der Natur der Zahlen zu liegen, daß weitere Eliminationen nicht zulässig sind. Wenn wir die 3 ersten Gleichungen auflösen, um eine P_2 zu bestimmen, so ergibt sich $\cos. 6\beta_1 = -1.0385$, $6\beta_2 = 85^0\,07'$.

Das erste β stellt offenbar die 11-jährige Einwirkung dar. Das zweite β deutet auf eine Periode von etwa 24 Jahren hin. Die Reste sind außerordentlich klein. Jedoch muß man sich durch die kleinen Zahlen nicht täuschen lassen. Diese sind zum großen Teil dadurch erzwungen, daß wir rechter Hand mit den großen Zahlen begonnen haben. Die Wahl der Gleichungen bei der Bildung des R'_4-Systems war auch etwas willkürlich. Wenn wir nach den besten P_1 auflösen, ergibt sich, ebenfalls mit ziemlich guter Übereinstimmung der Reste, $\beta = 32^0\,00'$. Einige Überlegung

zeigt uns, daß die Werte von r'_1 Näherungswerte von $\lim \frac{J^{x+2}}{J^x}$ sind. Diese $\underline{|6}$ Daten sind besonders geeignet, die 11-jährige Periode deutlich zu machen, da $6\beta \sim 180^0$ und somit $\sin\frac{\beta}{2} \sim 1$.

§ 83.

Untersuchungen der $\underline{5\,m|\,5}$ Daten.

Für die von 1843 bis 1908 $\underline{5\,m|\,5}$ Daten (siehe Fig. IX) finden sich für die möglichen P_4 R.S-Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrrr=0}
+.225\,p_4 & +.756\,p_3 & +1.005\,p_2 & +0.529\,p_1 & +.006 \\
+.440 & +1.618 & -.951 & +.178 & +.598 \\
+1.393 & -.827 & +.791 & -.882 & +.680 \\
-1.267 & +1.959 & -.758 & +1.293 & -.742 \\
+.566 & -2.465 & +2.461 & -.618 & -.966 \\
-1.198 & +1.634 & -2.325 & +.202 & -.451
\end{array}$$

Die Eliminationen gingen vor sich wie folgt,

(93) (nur 2 Dezimalstellen werden angegeben werden):

$$\begin{array}{rrrrr}
1\,p_4 & +3.36\,p_3 & +4.47\,p_2 & +2.35 & +.03 \\
1 & +3.68 & -2.16 & +.40 & +1.36 \\
1 & -.59 & +.57 & -.63 & +.49 \\
1 & -1.55 & +.60 & -1.02 & +.59 \\
1 & -4.36 & +4.35 & -1.09 & -1.71 \\
1 & -1.36 & +1.94 & -.17 & +.38
\end{array}$$

Daten			
1843 — .560	$1\,p_3$	−20.89	−6.13 +4.20
+1.796	1	−.64	+.24 +.20
−.388	1	−.03	+.41 −.10
+.316	1	−1.34	+.03 +.82
1863 +.225	1	−.80	+.31 +.70
+.440			
(92) +1.393	$1\,p_2$	+.3150	−.1973
−1.267	1	+.2695	−.5044
1883 +.566	1	+.2926	−.7048
−1.198	1	+.5343	−.2258
+1.068			
−1.058		$1\,p_1$	+6.75
1903 −1.191		1	−8.68
1908 −.891		1	+1.98

Es schien Grund genug vorhanden zu sein, die P_3 näher zu untersuchen, da die Übereinstimmung unerzwungen schien. Die Durchschnittslösung gibt:

$$z^3 - .3528\,z^2 - 3.5253\,z + 1.2342 = 0$$

p_3 (p_4 oben) = + .5286
p_2 (p_3 „) = − .5253
p_1 (p_2 „) = − .3528

$$z = 2\cos 5\beta = -1.8764, +.3500, +1.8792$$

$$5\beta = 159^0\,45', \quad 79^0\,55', \quad 20^0\,01'.$$

Die Rechnung auf der Basis der Daten der 6 Jahre 1868, 73 . . . 93 gibt mit Hilfe der Skala

(94) $T_0 - .3528\,(T_1 + T_5) - .5253\,(T_2 + T_4) + .5286\,T_3 = -T_6$

die in Kolonne (11) der Datentabelle befindlichen Werte. Die Übereinstimmung mit den Daten und das Verhalten außerhalb ihrer Grenzen veranlaßten uns, die Phasen und Amplituden aufzusuchen und zwar für jedes der beiden Enden der Tabelle, sodaß die Perioden mit Hilfe der Phasenmethode verbessert werden konnten. (Vgl. § 25.) Als erste Lösung für die Konstanten nehmen wir also

(95) $5\beta_1 = 159^\circ 45',\ 5\beta_2 = 79^\circ 55',\ 5\beta_3 = 20^\circ 00'$

$T_0' = 1855\frac{1}{2}$	$T_0'' = 1895\frac{1}{2}$
Daten, siehe (92), für 1843, 48 . . . 68.	Daten für 1883, 88 . . . 1908.

Bei Verwendung der Formeln (69) erhalten wir:

(96)

	1843–68	1883–1908
$\sum_{\varkappa=1}^{3} \cos \frac{1}{2}\beta_\varkappa B_\varkappa \sin b_\varkappa =$	$-$ .0360;	$+$ .0050
$\sum_{\varkappa=1}^{3}$ „ $1\frac{1}{2}$ „ „	$+$ 1.0105;	$-$ 1.1945
$\sum_{\varkappa=1}^{3}$ „ $2\frac{1}{2}$ „ „	$-$ .0600;	$-$ .1625

	1843–68	1883–1908
$\sum_{1}^{3} \sin \frac{1}{2}\beta_\varkappa B_\varkappa \cos b_\varkappa =$	$+$ .3520;	$-$ 1.0630
$\sum_{1}^{3}$ „ $1\frac{1}{2}$ „ „	$-$ .7855;	$+$ .0035
$\sum_{1}^{3}$ „ $2\frac{1}{2}$ „ „	$+$ .5000;	$-$ .7285

Zwischen T_0' und T_0'' sind acht Intervalle, weswegen $b'_\varkappa + 8\,(5\beta_\varkappa) = b''_\varkappa + n\,(360^\circ)$ und offenbar $n = 3, 2, 0$ für die 3 verschiedenen $\beta_\varkappa$.

Die so gefundenen Werte von $\beta_\varkappa$ wurden in demselben System (96) benutzt, um zweite Annäherungen zu erhalten, und dieser Prozeß wurde solange fortgesetzt, als es zweckmäßig war. Die Resultate sind:

	b'_1 / b''_1	B'_1 / B''_1	$5\beta_1$	b'_2 / b''_2	B_2 / B''_2	$5\beta_2$	b'_3 / b''_3	B'_3 / B''_3	$5\beta_3$
Urspr. Werte			159°45′			79°55′			20°00′
Erste Verbesserung	— 57°12′	1.067	158°17′	228°11′	.515	77°28′	87°00′	.424	17°25′
	129°01′	1.145		127°54′	.660		226°23′	.773	
(97) Zweite „	— 56°31′	1.058	158.16′	223°52′	.525	78°11′	76°17′	.430	18°28′
	129°40′	1.152		129°20′	.640		224°03′	.798	
Dritte „	— 56°07′	1.050	158°17′	224°43′	.525	77°57′	78°52′	.428	18°14′
	130°06′	1.142		128°20′	.641		224°43′	.792	
Vierte „	— 56°15′	1.052	158°17′	224°30′	.525	78°01′	78°06′	.429	18°20′
	129°58′	1.144		128°37′	.642		224°42′	.792	

Ich entschied mich zwecks einer Auswertung etwa die letzte Näherung [siehe (97)] zu benutzen. Nimmt man für T_0 1878, T_0 ist also $4\frac{1}{2}$ Perioden vor T'_0 gerückt, und für die $B_\varkappa$ die Mittel der unter T'_0 und T''_0 erhaltenen Werte an, so ergibt sich die Funktion für 3-Stationendaten:

(98) $1.098 \sin(296° + \text{m}\, 31°39') + .584 \sin(215°35' + \text{m}\, 15°36') + .610 \sin(150°35' + \text{m}\, 3°40')$.

Die Werte dieser Funktion sind in der Datentabelle zu finden; sie ist für dieselbe Axe gezeichnet, wie die $\frac{5\,\text{m}}{1}$ Daten. (Siehe Fig. IX(g).)

§ 84.

Diskussion der Resultate.

Eine Betrachtung der Figuren zeigt, daß dieses Resultat das sicherste von allen bisher erhaltenen ist. Man bemerkt: die gute Übereinstimmung der Maxima und Minima, die abwechselnd kleinen und großen Extrema, das besonders starke Maximum bei 1870, das starke Minimum um 1900 und das nachfolgende kleine Maxima. Die Übereinstimmung scheint außerordentlich gut zu sein, wenn man berücksichtigt, was alles noch im Reste stecken mag, kürzere Perioden unter 10 Jahren, Fehler infolge unserer angenommenen Amplituden, unregelmäßige Störungen, Fehler des Instruments und der Beobachtungen. Die Wirkung der drei periodischen Bestandteile ist in Fig. X klargelegt.

§ 85.

Bezüglich der Phasenberechnung und der dadurch verbesserten β ist zu bemerken: Die bei der ersten Berechnung stattfindende ziemlich große Veränderung der drei β und das bei den späteren Berechnungen stattfindende ziemlich regelmäßige Verhalten der β ist auffallend. Besonders ist die Beständigkeit der β_1 zu bemerken. Man kann vielleicht daraus schließen, daß β_1 ziemlich genau, β_2 weniger genau, und β_3 ungenau bestimmt ist (vgl. § 39 d). Be-

urteilt man die Genauigkeit der Bestimmung von β_1, β_2, β_3, nach den in den Berechnungen stattfindenden Veränderungen der β bezw. derjenigen, der den T'_0 und T''_0 entsprechenden b und B, so würde man diese Genauigkeit auf etwa 1%, 2%, 8% bezw. schätzen. Natürlich muß eine längere Reihe von Daten vorliegen, ehe man die lange Periode bestimmen kann. Man darf dieser Verbesserungsmethode einen zu großen Wert jedoch nicht zuschreiben. Das Verfahren kommt darauf hinaus, die P_3-Funktion den 12 zur Phasenberechnung angenommenen Daten anzupassen, ohne dabei eine Übereinstimmung der $B'_\varkappa$ und $B''_\varkappa$ zu erzwingen. Vergleicht man die Reste der mittels der Skala berechneten Werte (94) mit denen der angenommenen P_3, so findet man, daß die ersten kleiner sind und zwar im Verhältnis $\frac{1.142}{8} : \frac{1.283}{8}$. Daraus würde man erwarten, bei Verwendung der unverbesserten β und der Daten für 1868, 73 ..... 93 in der Bestimmung der $B_\varkappa$ und $b_\varkappa$ eine bessere P_3 zu bekommen.

Auffallend ist das Verhältnis der Werte der ursprünglichen β, das fast genau 1 : 2 : 4 ist. Dies könnte vielleicht eine Erklärung der Ursache der Erscheinung erleichtern und eine Untersuchung der Daten nach der Methode der Fourier'schen Reihen rechtfertigen.

Den verbesserten β entsprechen die Perioden bezw. 11,37; 23,08; 98,2 Jahre. Obgleich wir es allerdings nicht sicher festgestellt haben, scheint es doch glaubhaft zu sein, daß drei periodische Einflüsse von der Dauer ungefähr jener Perioden in der Schwankung der täglichen Variation der Magnetnadel vorhanden sind und in den Mittelwerten der 5-jährigen Summen der Jahresmittel dieser Erscheinung den größten Teil der Schwankung verursachen. Ordnet man die Perioden nach ihrer wahrscheinlichsten Genauigkeit, so würden sie wie oben stehen, dagegen würden bezüglich der Größe der Amplituden die letzten zwei miteinander zu vertauschen sein. Den unverbesserten Winkeln entsprechen die Perioden von 11¼; 22½; 90 Jahren.

§ 86.

Vorschläge für weitere Versuche mit diesen Daten.

Es würde interessant und lohnend sein, noch zu untersuchen

a) andere Systeme dieser $\frac{5m \mid 1}{}$ Daten, um zu erproben, ob die gewonnenen Resultate Täuschungen sind oder nicht, und falls es sich unzweifelhaft um eine periodische Erscheinung handelt, schließlich die wahrscheinlichsten Werte der einschlägigen Perioden usw. zu bestimmen.

b) Jede der Stationen für sich zu behandeln, um sie bezüglich der Existenz, Dauer und Amplitude der dort berechneten Perioden vergleichen zu können. Dies könnte jetzt leichter geschehen, da wir einen Fingerzeig für den einzuschlagenden Weg schon besitzen.

c) Die über diese Perioden verbleibenden Reste zu untersuchen, um möglicherweise dadurch die angenommenen Werte noch zu verbessern, und auch andere Perioden zu entdecken. Unsere Rechnung deutet an, daß eine vierte lange Periode nicht vorhanden ist. Aber Versuche mit $\frac{|5}{}$ Daten sind nicht geeignet, Perioden kürzer als 10 Jahre zu bekommen (vgl. § 23). Wir haben doch öfters Spuren einer 2- bis 3-jährigen Periode beobachten können.

d) Die Wirkung, welche entsteht, wenn man diese drei Periodizitäten aus den $\frac{5|1}{}$ und auch den $\frac{1|1}{}$ Daten eliminiert.

Erst wenn mehrere von diesen Untersuchungen geschehen sind, läßt sich etwas bestimmtes über die periodischen Eigenschaften dieser Erscheinung behaupten.

§ 87.

Zusammenhang zwischen den früheren Untersuchungen und der letzten.

Nachdem es sich schließlich herausgestellt hat, daß eine P_3-Funktion der obigen Beschaffenheit in den Daten dieser Erscheinung wahrscheinlich vorhanden ist, können wir bezüglich der früheren Untersuchungen folgendes bemerken:

Bei den Berliner Untersuchungen haben wir nur die starke kurze Periode gefunden. Wegen der geringen Anzahl der Daten war dies zu erwarten.

Bei der ersten Greenwicher Untersuchung, die mittels $\frac{5\,\mathrm{m}|7}{}$ Daten gemacht wurde, bekamen wir scheinbar die ersten und dritten Perioden. Damals haben wir für cos. $7\beta = -.830, +.868$ die Werte $7\beta = 146^0$ und 30^0 angenommen. Hätten wir dagegen $7\beta = (360^0 - 146^0)$ und 30^0 angenommen, dann hätten wir $\beta = 31^0$ und 4^0 erhalten, was sehr gut unserer ersten und dritten Periode entspricht. Hätten wir damals $\frac{5|5}{}$ Daten verwendet, dann wäre die Anzahl der Daten hinreichend gewesen, um ein P_3-System statt ein P_2-System zu bilden, und es kann wohl sein, daß wir früher zu der schließlich gefundenen P_3-Funktion gelangt wären.

Betreffend Christiania ist zu bemerken, daß eine lange Periode in den Fällen der $\frac{11|}{}$ und $\frac{23|}{}$ Daten stets zum Vorschein kam, aber fast immer mit einer kürzeren Dauer als bei den 3-Stationen-Untersuchungen. In den in § 64 mit $\frac{11|6}{}$ Daten erwähnten Ergebnissen erkennen wir in dem Werte $6\beta = 33^0\,12'$ die lange Periode. Die

Auswertung zeigt, daß β_2 keine wichtige Rolle spielt. Kann es indessen sein, daß sich das $6\beta = 94^0 05'$, trotzdem es mit einem Exponentialfaktor verbunden ist, auf unsere 23-jährige Periode bezieht? In dem letzten Versuch mit $\underline{11}|$ Daten scheint es, daß die lange Periode in eine hyperbolische Funktion übergegangen ist, und die zweite mit $\beta = 22^0 +$ hervortritt. Die zweite (23-jährige) Periode sollte unter Benutzung von $\underline{11}|$ Daten ziemlich stark auftreten, dagegen mit $|23$ Daten fast verschwinden. Wir finden dementsprechend keine Spur dieser Periode in den mit $|\underline{23}$ Daten ausgeführten Untersuchungen.

Schließlich ist, was die Untersuchungen der 3-Stationendaten anbelangt, zu bemerken: den 2 Perioden der Untersuchung nach der Differenzmethode entsprechen wahrscheinlich die 11-jährige und die 23-jährige Periode. Wenn auch die langjährige Periode eine größere Amplitude als die zweite besitzt, würde die entsprechende Verhältniszahl $-(2 \sin \frac{1}{2}\beta)^2$ immerhin klein sein. Deshalb würden die anderen Perioden eher zum Vorschein kommen (vgl. § 27).

§ 88.

Schlußbemerkung.

Gegen unsere angewandte Untersuchungsweise werden sich mit Recht vielleicht einige Einwendungen machen lassen. Man könnte darin einen Mangel erblicken, daß nicht genügend viel Beispiele zur Untersuchung herangezogen wurden, die mittels zweckmäßig ausgewählten weit genug voneinander abstehenden Daten geeignet gewesen wären, längere Perioden zum Vorschein zu bringen.

Die viele Mühe, die es gekostet hat, die Daten so zusammenzufassen und die Gleichungen so aufzustellen, daß möglichst viele der zur Verfügung stehenden Daten in die Rechnung miteinbezogen wurden, war vielleicht nicht einmal angebracht. Es scheint dagegen, wenigstens für die ersten Proben, zweckmäßiger zu sein, mit nicht zu vielen aber vernünftig ausgewählten der ursprünglichen Daten vorzugehen.

Auch ist vielleicht zu verurteilen, daß man sich zu sehr auf die Verfolgung von nicht sicher genug festgestellten Spuren von Periodizitäten eingelassen hat.

Schon öfters haben wir uns veranlaßt gesehen, auf die Schwächen und Nachteile der Methoden, die rekurrente Reihen zu Hilfe nehmen, aufmerksam zu machen. Schon in den Untersuchungen mit berechneten Daten (vgl. §§ 37, 44) haben wir die Empfindlichkeit dieser Methoden und die irreführende Wirkung von

selbst nur geringfügigen Datenfehlern erfahren können. Weitere diesbezügliche Bemerkungen werden auch in den §§ 53, 54, 57, 79 gemacht.

Zu dieser Wahrnehmung sei noch ergänzend hinzugefügt:

Es besteht immer eine Ungewißheit darüber, inwieweit man aus den anfangs vorzunehmenden Proben wie: Verschwinden der Reste bzw. der Determinanten — mögen sie nun mehr oder weniger erfüllt sein — auf das Vorhandensein einer Periodizität schließen kann. Wegen der Willkürlichkeit aller mit ungenauen Daten ausgeführten numerischen Rechnungen können hier wohl Widersprüche auftreten und zwar insofern, als wirklich periodische Daten weniger gut diese Kriterien erfüllen können als nicht periodische. Es liegt auf der Hand, daß derjenige, welcher sich dadurch irreführen läßt, oft ungeheuer viel nutzlose Arbeit verschwenden kann. Fast jede denkbare rechnerische Täuschung kann hier vorkommen. Auch wenn die Anfangsbedingungen noch so sorgfältig aufgestellt sind, ist zu erwarten, daß ungünstige Umstände im Verlauf der Rechnungen auftreten werden. Diese Schwierigkeiten liegen manchmal in der Natur der Daten selbst und sind dann unvermeidlich. Die äußerste Empfindlichkeit der Methoden, von der man ja zunächst meinen könnte, sie sei wenigstens theoretisch vorteilhaft, ist im Fall ungenauer Daten, auf welche die Methoden hauptsächlich Anwendung finden, oft vielmehr ein Nachteil.

Wegen der besprochenen Schwächen wird kaum zu erwarten sein, daß die in dieser Arbeit betrachteten Methoden eine verbreitete Verwendung zur Aufsuchung versteckter Periodizitäten je finden werden. Immerhin scheinen in solchen Beispielen, ähnlich dem letzten mit 3-Stationendaten durchgeführten, diese Methoden nicht nur bezüglich der Periodenbestimmung selbst, sondern auch bezüglich der Phasen- und Amplitudenbestimmung, wenn auch nicht gerade einen besonderen Vorzug zu besitzen, so doch interessant und empfehlenswert zu sein.

§ 89.

Tabelle der magnetischen Daten.

Daten des Jahresmittels der täglichen Schwankung der Magnetnadel (in Bogenminuten).

(Vgl. die Graphen, Tafel I.)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1841				— 0.35	6.28	8.32	7.43	7.34		(1833)	— 1.437
				— 1.15	5.48	7.50	6.34	6.44		(1838)	+ .751
			— 0.92	— .88	5.75	7.36	6.58	6.56	— 0.560	— 0.578	— .663
			— .95	— 1.40	5.23	6.98	5.96	6.06	— .584	— .273	
			— .57	— .81	5.82	7.61	7.00	6.81	— .152	+ .285	
		+ 2.23	+ .10	— .53	6.10	7.93	7.65	7.23	+ .616	+ .962	
		+ 3.12	+ .78	+ .76	7.39	9.72	8.68	8.60	+ 1.332	+ 1.575	
		+ 4.22	+ 1.31	+ 2.47	9.10	11.37	10.75	10.41	+ 1.796	+ 1.961	+ 1.914
		+ 4.47	+ 1.47	+ 1.99	8.62	9.95	10.34	9.64	+ 1.842	+ 1.999	
1850		+ 4.40	+ 1.43	+ 1.87	8.50	8.91	9.97	9.13	+ 1.646	+ 1.680	
		+ 3.60	+ .92	+ .26	6.89	7.17	8.32	7.46	+ .982	+ 1.079	
	+ 4.96	+ 3.00	+ .40	+ .54	7.17	7.58	8.09	7.61	+ .292	+ .356	
	+ 4.68	+ 3.16	— .27	— .05	6.58	7.59	7.09	7.09	— .388	— .308	— .197
	+ 4.95	+ 3.26	— .64	— .63	6.00	5.76	6.81	6.19	— .806	— .739	
	+ 4.90	+ 3.06	— .98	— 1.47	5.16	5.60	6.41	5.72	— 1.138	— .834	
	+ 5.36	+ 2.38	— .78	— 1.61	5.02	5.12	5.98	5.37	— 1.044	— .600	
	+ 6.18	+ 2.36	— .14	— 1.13	5.50	5.41	6.95	5.95	— .310	— .121	
	+ 7.91	+ 2.19	+ .51	+ .92	7.55	7.71	7.41	7.56	+ .316	+ .444	+ .354
	+ 10.53	+ 1.61	+ 1.07	+ 2.57	9.20	10.01	10.36	9.86	+ .874	+ .921	
1860 +	11.29	+ 1.36	+ 1.44	+ 1.79	8.42	8.04	10.10	8.85	+ 1.222	+ 1.173	
	+ 11.88	+ 1.90	+ 1.23	+ 1.19	7.82	7.51	9.17	8.17	+ 1.251	+ 1.135	
	+ 11.10	+ 2.57	+ .59	+ .24	6.87	7.61	8.60	7.69	+ .694	+ .839	
	+ 11.30	+ 3.71	+ .06	+ .37	7.00	7.26	8.84	7.70	+ .225	+ .402	+ .364
	+ 9.80	+ 3.99	— .37	— .63	6.00	7.19	8.02	7.07	— .250	— .021	
	+ 8.71	+ 4.80	— .60	— .88	5.75	5.85	7.93	6.51	— .617	— .265	
	+ 7.91	+ 6.24	— .67	— .93	5.70	4.21	7.46	5.79	— .726	— .227	
	+ 7.94	+ 7.63	— .31	— .94	5.69	4.94	6.95	5.86	— .442	+ .109	
	+ 8.46	+ 8.48	+ .54	+ .01	6.64	6.81	8.02	7.16	+ .440	+ .676	
	+ 9.46	+ 8.57	+ 1.38	+ 1.20	7.83	8.42	9.22	8.49	+ 1.434	+ 1.315	
1870 +	8.91	+ 8.24	+ 2.08	+ 3.38	10.01	11.52	11.23	10.92	+ 2.278	+ 1.850	
	+ 7.01	+ 7.98	+ 2.30	+ 3.23	9.86	11.00	11.42	10.76	+ 2.540	+ 2.118	
	+ 6.08	+ 7.48	+ 2.15	+ 2.58	9.21	10.32	10.70	10.08	+ 2.365	+ 2.026	
	+ 6.25	+ 6.98	+ 1.28	+ 1.09	7.72	8.64	9.05	8.47	+ 1.393	+ 1.582	
	+ 6.44	+ 5.88	+ .41	+ .46	7.09	7.77	7.98	7.61	+ .459	+ .891	
	+ 5.85	+ 4.55	— .40	— .96	5.67	5.78	6.73	6.06	— .440	+ .115	
	+ 5.16	+ 1.54	— .90	— 1.14	5.49	6.31	6.47	6.09	— 1.060	— .552	
	+ 4.82	— 1.02	— 1.21	— 1.43	5.20	5.60	5.95	5.58	— 1.403	— .958	
	+ 4.20	— 2.74	— 1.05	— 1.44	5.19	5.27	5.65	5.37	— 1.267	— 1.026	
	+ 3.78	— 2.47	— .74	— 1.09	5.54	6.16	5.99	5.90	— .980	— .776	
1880 +	3.45	— 2.50	— .32	— .13	6.50	6.87	6.85	6.74	— .571	— .320	
	+ 2.98	— 1.76	+ .14	+ .37	7.00	7.68	7.90	7.53	— .045	+ .180	
	+ 2.13	— 1.94	+ .63	+ .67	7.30	7.66	7.92	7.63	+ .429	+ .553	
	+ .55	— 1.73	+ .74	+ .86	7.49	8.17	8.34	8.00	+ .566	+ .674	
	— 1.37	— 1.84	+ .62	+ 1.36	7.99	8.54	8.27	8.27	+ .371	+ .518	
	— 2.49	— 2.11	+ .22	+ .43	7.06	7.39	7.83	7.43	+ .061	+ .121	
	— 3.61	— 2.30	— .19	— .22	6.41	6.24	7.00	6.55	— .347	— .363	
	— 3.75	— 1.94	— .78	— 1.32	5.31	6.20	6.72	6.08	— .884	— .798	
	— 3.92	— .08	— 1.13	— 1.22	5.41	5.83	6.64	5.96	— 1.198	— 1.010	
	— 3.94	+ .71	— 1.15	— 1.55	5.08	5.67	5.99	5.53	— 1.106	— .913	

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1890	— 4.06	+ .01	— .74	— 1.36	5.27	6.14	6.16	5.86	— .696	— .523	
	— 5.17	— .45	+ .01	— .32	6.31	7.31	7.42	7.01	— .004	+ .067	
	— 5.96	— .89	+ .65	+ .73	7.36	8.36	8.65	8.12	+ .624	+ .692	
	— 6.46	— .67	+ 1.05	+ 2.53	9.16	9.51	9.59	9.42	+ 1.068	+ 1.170	
	— 6.10	— .76	+ 1.11	+ 1.65	8.28	8.86	9.02	8.72	+ 1.096	+ 1.354	
	— 6.34	— .66	+ .83	+ .66	7.29	8.28	8.67	8.08	+ .758	+ 1.234	
	— 7.77	— .86	+ .10	— .03	6.60	7.07	7.79	7.15	+ .076	+ .803	
	— 8.81	— 2.74	— .49	— .66	5.97	6.48	6.85	6.43	— .532	+ .118	
	— 9.23	— 4.39	— .91	— 1.10	5.53	6.16	6.34	6.01	— 1.058	— .829	— 1.167
	— 9.45	— 7.05	— 1.22	— 1.31	5.32	5.45	6.27	5.68	— 1.415	— 1.438	
1900	— 7.67	— 1.52	— 1.45	5.18	5.17	5.99	5.45	— 1.734	— 1.760		
	— 7.71	— 1.49	— 1.56	5.07	5.37	5.67	5.37	— 1.742	— 1.737		
	— 7.75	— 1.25	— 2.20	4.43	4.59	5.50	4.84	— 1.603	— 1.418		
	— 7.70	— .76	— .92	5.71	5.44	6.76	5.97	— 1.191	— .933	— .959	
	— 7.24	— .32	— .13	6.50	5.82	6.80	6.37	— .831	— .443		
	— 7.47	+ .11	+ 1.03	7.66	7.10	7.76	7.51	— .401	— .115		
		+ .17	+ .62	7.25	6.56	7.70	7.17	— .290	— .053		
		+ .07	— .07	6.56	6.56	7.85	6.99	— .368	— .263		
		— .45	— .61	6.02	6.34	7.22	6.53	— .891	— .663	— .679	
			— .64	5.99	5.19	6.77	5.98		— 1.138		
1910				— 1.54	5.09	3.79	5.79	4.89		— 1.488	
										— 1.586	
										— 1.366	
										— .863	— .553
										(1918) + 1.916	
										(1923) — 1.591	
										(1928) + .684	

Kolonne (1) die Christiania $\frac{23}{}$ Daten *
(2) „ „ $\frac{11}{}$ „ *
(3) „ „ $\frac{5m}{}$ „ *
(4) „ „ Daten *
(5) „ „ „
(6) „ Mailänder „
(7) „ Prager „

Kolonne (8) das Mittel von (5) (6) (7), (die 3-Stationen Daten)
(9) die 3-Stationen $\frac{5m|1}{}$ Daten **
(10) die Werte der P_3-Funktion (98), § 83
(11) die mittels der Skala (94) berechneten Werte.

* Nach Subtraktion des langjährigen Mittels 6'.63.
** „ „ „ „ „ 7'.203.

Erläuterungen zu den Figuren. (Fig. 1 u. 2 stehen im Texte.)

Fig. 3 (vgl. § 31) $3 \sin (60^0 + m\ 50^0) + 5 \sin (70^0 + m\ 35^0)$ für ganze m.

„ 4 („ § 40) $5 \sin (70^0 + m\ 35^0) + 3 \sin (60^0 + m\ 50^0) + 5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0$ für ganze m.

„ 5 („ § 40) $2 \sin (20^0 + m\ 3^0) + 3 \sin (60^0 + m\ 50^0) + 5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0$ für ganze m.

„ 6a, 6b, 6c, 6d („ § 41):

„ 6a: $5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0$ für ganze m.

„ 6b: $5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0 +$ unperiodische Reihenfolge.

„ 6c: $5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0 + \frac{1}{10}$ der unperiodischen Reihenfolge.

„ 6d: $5 \sin (30^0 + m\ 120^0) + 2 \sin m\ 170^0 + \frac{1}{100}$ der unperiodischen Reihenfolge.

„ 7 („ § 42) die S- und S_n-Reihenfolgen des § 42.

„ 8 („ § 47) photographische Aufnahme der gedämpften Schwingungen eines Galvanometers.

„ 9 („ § 48) die gedämpften Schwingungen.

„ 9a o o (vgl. § 48) die Funktion

$$F_1 = 3.10\, e^{-.0510\, m} \sin (134^0 + m\ 33^0\ 10') \qquad (89).$$

„ 10 (vgl. § 54) die $\underline{5}$-Daten der eisfreien Zeit der russ. Ströme.

„ 11a („ § 55) die $\underline{1}$-Daten des Wasserstandes des Bodensees.

„ 11a (g) (vgl. § 56) die berechnete P_3-Funktion.

„ 11b (vgl. § 56) die zu 11a entsprechenden $\underline{5\ m}$-Werte.